"With the compliments
E. D. Roe, Jr."
1151 College Ave
Elmira, N.Y.
U.S.

DIE ENTWICKELUNG

DER

SYLVESTER'SCHEN DETERMINANTE

NACH NORMAL-FORMEN

VON

DR. EDWARD DRAKE ROE, JR.
ASSOCIATE PROFESSOR OF MATHEMATICS IN OBERLIN COLLEGE

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1898

DIE ENTWICKELUNG

DER

SYLVESTER'SCHEN DETERMINANTE

NACH NORMAL-FORMEN

VON

Dr. EDWARD DRAKE ROE, Jr.

ASSOCIATE PROFESSOR OF MATHEMATICS IN OBERLIN COLLEGE

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1898

Vorrede.

Die folgende Untersuchung ist auf Anrathen des Herrn Professor Gordan unternommen worden; ich habe bei ihm eine Vorlesung über die Sylvester'sche Determinante gehört; hiervon ausgehend, habe ich die Entwickelung der Resultanten erörtert. Bei dieser Gelegenheit will ich dem Herrn Professor Gordan meinen Dank abstatten für das Interesse, welches er meinen Studien gewidmet hat. Die Zeit, die ich in Erlangen zugebracht habe, gehört zu den nützlichsten Perioden meines wissenschaftlichen Lebens.

Die directe Entwickelung der Sylvester'schen Determinante nach den allgemeinen Regeln der Determinanten-Theorie ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Der Grund hiervon liegt in der grossen Anzahl von überflüssigen Gliedern, welche in ihr vorkommen und sich erst im Resultat wegheben. Wenn wir jedoch die Gesetze, welche die Resultante ersichtlich besitzt, erwägen, dann verhält sich die Sache anders; die Sylvester'sche Determinante ist ja nur eine Form der Resultante, und die Aufgabe besteht in der Entwickelung der Resultante selbst. Wir wollen diese Entwickelung nach Normal- und reducibeln Formen vornehmen. Diese Methode unterscheidet sich wesentlich von der des Herrn Cayley (Phil. Trans. vol. CXLVII, 1857, p. 703—715). Er geht vom Laplace'schen Satz aus und fasst alsdann die Glieder geschickt zusammen. Als Werthe der Resultante erhalten wir hingegen eine vierfache Summe. Als Beispiele geben wir die Resultanten $R_{m,2}$ und $R_{5,4}$.

Inhaltsverzeichniss.

VII. Ableitung.

VIII. Vollständig reducible Glieder.

IX. Erweiterte Ableitung.

X. Entwickelungs-Formel für $R_{m,n}$.

XI. Relationen zwischen den Coefficienten in $R_{m,n}$.

I. Einleitung.

Gegeben seien die Formen

$$f = a_0 x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \cdots (-1)^m a_m$$

und

$$\varphi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Die erste ist vom m^{ten} Grade und die zweite vom n^{ten} Grade. Wir nehmen $m \geqq n$. Sylvester hat die Resultante $R_{f,\varphi}$ als $(m+n)$-reihige Determinante in folgender Weise dargestellt:

$$\begin{vmatrix}
a_0 - a_1 & a_2 - a_3 \cdots & (-1)^m a_m & 0 & 0 \cdots & 0 \\
0 & a_0 - a_1 & a_2 \cdots & (-1)^m a_m & 0 \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & a_0 - a_1 \cdots & & (-1)^m a_m \\
b_0 & b_1 & b_2 \cdots & b_n & 0 \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 \cdots & & b_n \; 0 \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \cdots & & b_0 & b_1 \cdots & b_n
\end{vmatrix}$$

Wir bezeichnen sie durch $\varDelta_{m,n}$, und die Resultante $R_{f,\varphi}$ entsprechend durch $R_{m,n}$. Also $\varDelta_{m,n} = R_{m,n}$. Die Resultante der Formen

$$f_\varrho = a_\varrho x^m - a_{\varrho+1} x^{m-1} + \cdots (-1)^m a_{\varrho+m}$$

und

$$\varphi_\sigma = b_\sigma x^n + b_{\sigma+1} x^{n-1} + \cdots + b_{\sigma+n}$$

bezeichnen wir durch $R^{\varrho,\,\sigma}_{m,\,n}$. Wenn wir auch $\varDelta_{m,n} = R^{\cdot}_{m,n}$ setzen, so machen wir doch einen Unterschied zwischen den Ausdrücken auf beiden Seiten dieser Gleichung. Die Glieder von $R_{m,n}$ sind zwar sämmtlich in $\varDelta_{m,n}$ enthalten; das Umgekehrte findet aber nicht statt. Im Gegentheil kommen in der Determinante $\varDelta_{m,n}$ viele Glieder vor, welche in der Resultante sich wegheben. Ferner kommt es vor, dass ein Glied in $\varDelta_{m,n}$ zu wiederholten Malen auftritt, sei es mit positivem, sei es mit negativem Vorzeichen; die Producte in $R_{m,n}$ treten jedoch stets mit bestimmten Coefficienten versehen auf.

Die überflüssigen Glieder von $\Delta_{m,n}$ dienen zur Darstellung der Resultante als Determinante oder auch als Invariante. Bei der Berechnung von $R_{m,n}$ fallen sie natürlich hinweg.

Es giebt besonders drei charakteristische Eigenschaften der Resultante:

1) Sie ist eine ganze (rationale) Function der Coefficienten a und b. In den a hat sie den Grad n, und in den b den Grad m.

2) Für
$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0, \text{ wird } b_0 R_{(-1)(f-a_0x^m),\varphi} &&= b_0 R^{1}_{m-1,n},\\
b_0 &= 0, \text{ wird } a_0 R_{f,\varphi-b_0x^n} &&= a_0 R^{1}_{m,n-1},\\
a_m &= 0, \text{ wird } b_n R_{\frac{f-a_m}{x},\varphi} &&= b_n R_{m-1,n},\\
b_n &= 0, \text{ wird } a_m R_{f,\frac{\varphi-b_n}{x}} &&= a_m R_{m,n-1}.
\end{aligned}
$$

3) $R_{f,\varphi} = R_{f+\lambda\varphi,\varphi}$. Hierbei ist λ eine ganze Function $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades von x. Im Folgenden genügt es für λ, $\varkappa x^{m-n}$ zu nehmen, wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet. Diese drei Eigenschaften der Sylvester'schen Determinante sollen hier zur Berechnung der Resultante verwerthet werden.

1) Als ganze Function der Coefficienten a und b ist die Resultante ein Aggregat von Producten P, welche n Factoren a und m Factoren b enthalten. Nicht alle Producte dieser Art treten in der Resultante auf, sondern nur solche, welche folgende Eigenschaften besitzen: Ihre Coefficienten verschwinden nicht; alle Glieder haben dasselbe Gewicht, nämlich mn.

2) Die Glieder der Resultante haben mindestens einen der Coefficienten a_0, b_0 zu Factoren, und ebenso mindestens einen der Coefficienten a_m, b_m. Diejenigen unter ihnen, welche alle vier Coefficienten a_0, b_0, a_m, b_n zu Factoren haben, heissen Normal-Formen; die übrigen gelten als reducible Formen, da sie sich im Allgemeinen auf Normal-Formen zurückführen lassen.

3) Die Glieder der Resultante $R_{m,n}$, welche aus derselben Normal-Form abgeleitet sind, haben denselben Coefficienten, nämlich den der betreffenden Normal-Form in ihrer Resultante. Diese Coefficienten sollen systematisch berechnet werden, indem man von Resultanten niederen Grades zu solchen höheren Grades aufsteigt. Bei ihrer Berechnung benützen wir die Identität $\delta R_{m,n} \equiv 0$, oder

$$b_0 \frac{\partial R_{m,n}}{\partial a_0} - b_1 \frac{\partial R_{m,n}}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial R_{m,n}}{\partial a_2} - \cdots (-1)^n b_n \frac{\partial R_{m,n}}{\partial a_n} \equiv 0.$$

Wir bezeichnen die Summe der Normal-Formen, die in einer Resultante $R_{m,n}$ auftreten, mit $W_{m,n}$; weiter die Summe der vollständig reduciblen Formen mit $V_{m,n}$; die Formen $W_{m,n}^{\varrho,\sigma}$, $V_{m,n}^{\varrho,\sigma}$ bedeuten die den Formen $W_{m,n}$ und $V_{m,n}$ entsprechenden Aggregate, wenn man die Indices der a um ϱ und die Indices der b um σ vermehrt $(f_\varrho, \varphi_\sigma)$. So gelangen wir zu der Formel

$$R_{m,n} = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\, V_{m-\mu,\,n-\nu}^{\mu,\,\nu}\, V_{\varrho,\sigma}\, W_{\mu-\varrho,\,\nu-\sigma}^{\varrho,\,\sigma}.$$

II. Die Glieder der Resultante.

§ 1. Bestimmung der Glieder der Determinante aus Permutationen.

Die Glieder der Sylvester'schen Determinante $\Delta_{m,n}$ zweier Formen

$$f = a_0 x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \cdots (-1)^m a_m,$$

$$\varphi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

haben die Form:

(1) $$G = (-1)^i a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m},$$

wo die Anzahl der a, n, die der b, m, die Summe von

(2) $$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = mn$$

ist, die Zahlen $\varkappa_1 + 1$, $\varkappa_2 + 2, \cdots \varkappa_n + n$, $\lambda_1 + 1$, $\lambda_2 + 2, \cdots \lambda_m + m$ eine Permutation p der Zahlen $1, 2, \cdots m + n$ bilden und wo i die Summe der Anzahl der Derangements der Zahlen $\varkappa_1 + 1, \cdots \lambda_m + m$ in der Permutation p und des Gewichtes $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n$ der a ist.

§ 2. Beziehung zwischen verschiedenen Gliedern der Determinante $\Delta_{m,n}$.

Vertauscht man die $\varkappa_\varrho + \varrho$ mit den $\lambda_\varrho + \varrho$ in der Permutation $p = \varkappa_1 + 1$, $\varkappa_2 + 2 \cdots \varkappa_n + n$, $\lambda_1 + 1$, $\lambda_2 + 2 \cdots \lambda_m + m$, so erhält man eine neue Permutation p', und ein anderes Glied der Determinante $\Delta_{m,n}$, welches der Permutation p' entspricht; es entsteht aus G, indem man die $\varkappa_\varrho$ mit den λ_ϱ vertauscht. Diese Vertauschung kann man, wenn $m > n$ ist, mindestens 2^n mal vornehmen; die so entstehenden Glieder von $\Delta_{m,n}$ lassen sich in eine Gruppe zusammenfassen.

§ 3. Andere Bezeichnungen für die Glieder.

Mehrere $\varkappa$ oder mehrere λ können denselben Werth haben; wir dürfen die $G = (-1)^i a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m}$ auch schreiben

$$(3) \qquad G = (-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

wo wir die r und s gut ordnen. Zwischen den Indices r, s und den Exponenten p, q bestehen die Relationen:

$$(4) \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = n,$$

$$(5) \qquad q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu = m,$$

$$(6) \qquad p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + q_1 s_1 + q_2 s_2 + \cdots = mn.$$

§ 4. Bestimmung von Permutationen aus Producten.

Nach den vorigen Paragraphen haben die Glieder

$$(-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

der Determinante $\varDelta_{m,n}$ zwei Eigenschaften; erstens bestehen die Relationen (4), (5), (6); zweitens kann man die Factoren $a_{\varkappa_1}$, $a_{\varkappa_2}, \cdots a_{\varkappa_n}$, b_{λ_1}, $b_{\lambda_2}, \cdots b_{\lambda_m}$ so ordnen, dafs die Zahlen $\varkappa_1 + 1$, $\varkappa_2 + 2, \cdots \varkappa_n + n$, $\lambda_1 + 1$, $\lambda_2 + 2, \cdots \lambda_m + m$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots m + n$ bilden. Dieser Fall kann auch bei mehreren Anordnungen der Factoren a und b eintreten.

§ 5. Die Coefficienten.

Das Product

$$G = (-1)^i a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m}$$
$$= (-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

kann öfter als Glied der Determinante $\varDelta_{m,n}$ auftreten. Bei jedem Auftreten hat es entweder den Coefficienten $+1$ oder den Coefficienten -1. Die Summe dieser Zahlen bezeichnen wir durch

$$(7) \qquad r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,\big|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu};$$

sie ist der Coefficient des Productes $a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$ in der Resultante $R_{m,n}$.

§ 6. Producte als Glieder der Determinante.

Um irgend ein Product

$$a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu} = a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m},$$

bei dem die Relationen (4), (5), (6) bestehen, als Glied der Determinante $\Delta_{m,n}$ darzustellen, permutiren wir die $\varkappa$ und λ auf jede mögliche Weise der Art, daſs die Reihe $\varkappa_1 + 1, \varkappa_2 + 2, \cdots \varkappa_n + n$, $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 2 \cdots \lambda_m + m$ entsteht. Es giebt $\frac{n!}{p_1! p_2! \cdots p_\mu!}$ Permutationen der $\varkappa$, $\frac{m!}{q_1! q_2! \cdots q_\nu!}$ Permutationen der λ, und durch Combination $\frac{m!\, n!}{p_1! p_2! \cdots p_\mu! q_1! q_2! \cdots q_\nu!}$ Permutationen der $\varkappa$ und λ zusammen $\varkappa_1 + 1, \varkappa_2 + 2, \cdots \varkappa_n + n, \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 2, \cdots \lambda_m + m$. Von diesen liefern nur diejenigen Glieder der Determinante $\Delta_{m,n}$, welche Permutationen der Zahlen $1, 2, \cdots m + n$ bilden. Diese Auswahl kann auf folgende Art getroffen werden. Erstens bilde man alle Permutationen der $\varkappa$, welche die Bedingung $\varkappa_\varrho + \varrho \mp \varkappa_\sigma + \sigma$ befriedigen; dann bilde man die Permutationen der λ, welche die Bedingung $\lambda_\varrho + \varrho \mp \lambda_\sigma + \sigma$, und schliesslich verbinde man die so entstandenen Zahlen, sofern sie der Bedingung $\varkappa_\varrho + \varrho \mp \lambda_\sigma + \sigma$ genügen. So entstehen alle gesuchten Permutationen. In den nächst folgenden Beispielen erläutern wir die Ausführung dieses Processes.

1. Es sollen zunächst die Glieder der Determinante $\Delta_{4,4}$, welche zu dem Producte $a_0 a_1^2 a_4 b_0 b_2 b_4^2$ gehören, gefunden werden. Es giebt $\frac{4!}{2!} = 12$ Permutationen der $\varkappa$ und desgleichen $\frac{4!}{2!} = 12$ Permutationen der λ.

$\varkappa$	λ
0114	0244
0141	0442
0411	0424
1014	2044
1041	4042
4011	4024
1104	2404
1401	4402
4101	4204
1140	2440
1410	4420
4110	4240

Von diesen Zahlen-Systemen der $\varkappa$ genügen

0114
0141
0411 (A) der Bedingung $\varkappa_\varrho + \varrho \mp \varkappa_\sigma + \sigma$,
1401
1140

und von den Zahlen-Systemen der λ genügen

0244
0424
2044 (B) der Bedingung $\lambda_\varrho + \varrho \mp \lambda_\sigma + \sigma$.
4042
2404
2440

Die 5 Systeme (A) der $\varkappa$ werden mit den 6 Systemen (B) der λ zusammengesetzt. Es entstehen so 30 Combinationen, von denen diese vier 01144042, 04112044, 14010244, 11400424 der Bedingung $\varkappa_\varrho + \varrho \neq \lambda_\sigma + \sigma$ genügen. Diese vier Systeme liefern die Permutationen 13485276, 16453278, 26351478, 23741658, und die Glieder $a_0 a_1^2 a_4 b_0 b_2 b_4^2$, $- a_0 a_1^2 a_4 b_0 b_2 b_4^2$, $a_0 a_1^2 a_4 b_0 b_2 b_4^2$, $a_0 a_1^2 a_4 b_0 b_2 b_4^2$ der Determinante $\Delta_{4,4}$. Hieraus folgt $01^2 4 | 024^2 = 2$.

2. In ähnlicher Weise können die Glieder von $\Delta_{4,3}$, welche zu dem Producte $a_0^2 a_4 b_0 b_2 b_3^2$ gehören, in folgender Weise gefunden werden:

$\varkappa$	λ	$\varkappa$	λ	$\varkappa\ \lambda$	Permutation
004	0233	004	0233	0043302	1274536
040	0332	040	2033	0042330	1273564
400	0323	400	3023	0403023	1634257
	2033		3302	4000233	5231467
	3032		2330		
	3023				
	2303				
	3302				
	3203				
	2330				
	3320				
	3230				

Das Product $a_0^2 a_4 b_0 b_2 b_3^2$ kommt viermal vor, stets mit positivem Vorzeichen. Deshalb ist $0^2 4 | 023^2 = 4$.

3. Aehnlich wird für das Product $a_0 a_1^2 a_5 b_0 b_3^3 b_4$

$\varkappa$	λ	λ	λ
0115	03334	33034	33340
0151	03343	33043	33430
0511	03433	34033	34330
1015	04333	43033	43330
1051	30334	33304	
5011	30343	33403	
1105	30433	34303	
1501	40333	43303	
5101			
1150			
1510			
5110			

$\varkappa$	λ	$\varkappa\ \lambda$	Permutation
0115	03334	011540333	134952678
0151	30334	015130334	138542679
0511	40333	115003334	238415679
5011	33034		
1501	34033		
1150			

Den Permutationen 134952678, 138542679, 238415679 entsprechen die Glieder $-a_0 a_1^2 a_5 b_0 b_3^3 b_4$, $a_0 a_1^2 a_5 b_0 b_3^3 b_4$, $-a_0 a_1^2 a_5 b_0 b_3^3 b_4$. Somit ist $01^2 5 | 03^3 4 = -1$.

§ 7. Die Factoren A und B der Glieder der Determinante $\Delta_{m,n}$.

Nach § 3 sind die Glieder der Determinante $\Delta_{m,n}$

$$G = (-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}.$$

Sie haben die Factoren:

$$A = a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu}, \tag{8}$$

$$B = b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m} = b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}. \tag{9}$$

Die Summen

$$g_1 = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + p_\mu r_\mu, \tag{10}$$

$$g_2 = q_1 s_1 + q_2 s_2 + \cdots + q_\nu s_\nu, \tag{11}$$

und

$$g = g_1 + g_2 = mn, \tag{12}$$

sind die Gewichte der Producte A, B und G.

Die Factoren A und B ergänzen sich, als complementäre Factoren, zu dem Gliede G der Determinante $\Delta_{m,n}$. Es giebt viele G, welche denselben ersten Factor A besitzen. Man erhält sie aus A, indem man dazu die complementären Factoren B aufsucht. Hierzu bestimmen wir die Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ der Diophantischen Gleichung

$$g_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = mn - g_1,$$

und bilden die Producte $b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m}$.

Wenn die Werthe $\varkappa$, λ so geordnet werden können, dass die Zahlen $\varkappa_1 + 1$, $\varkappa_2 + 2 \cdots \varkappa_n + n$, $\lambda_1 + 1 \cdots \lambda_m + m$ eine Permutation der Zahlen $1, 2 \cdots m + n$ bilden, so ist

$$(-1)^i a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_m}$$

ein Glied der Determinante $\Delta_{m,n}$. Hierdurch können die G in

Classen getheilt werden. Jeder Classe entspricht ein A. Die Indices r der Factoren a von A können alle Werthe zwischen 0 und m annehmen. Die Anzahl sowohl aller A als auch aller B ist $\binom{m+n}{n}$. Die $A = a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu}$ erhält man bei passender Wahl aus den $\binom{m+n}{n}$ Combinationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ der Zahlen $0, 1, \cdots m$.

§ 8. **Specielle Werthe der $\varkappa$ und λ.**

In der Permutation $p = \varkappa_1 + 1, \varkappa_2 + 2, \cdots \varkappa_n + n, \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 2, \cdots \lambda_m + m$ kommen unter andern die Zahlen 1 und $m + n$ vor. Die Zahl 1 kann nur von $\varkappa_1 + 1$, oder $\lambda_1 + 1$, und die Zahl $m + n$ nur von den Zahlen $\varkappa_n + n$, $\lambda_m + m$ herrühren. Sowohl eine der Grössen $\varkappa_1$, λ_1 als auch eine der Differenzen $m - \varkappa_n$, $n - \lambda_m$ verschwindet. Desgleichen verschwinden in dem Gliede

$$(-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

sowohl mindestens einer der Indices r_1, s_1, als auch mindestens eine der Differenzen $m - r_\mu$, $n - s_\nu$. G hat mindestens einen der Factoren a_0, b_0 und mindestens einen der Factoren a_m, b_n. (Vgl. Einleitung S. 2.)

§ 9. **Glieder mit Factoren a_0, b_0.**

Hat G zwei Factoren a_0, b_0 und ist nach der erörterten Anordnung $G = (-1)^i a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m}$, so liefert in der Permutation p, d. h. $\lambda_\varrho + \varrho = \varrho$, resp. $\varkappa_\tau + \tau = \tau$, eine der Nullen eine Zahl ϱ resp. τ, verschieden von 1. Wenn man λ_ϱ mit $\varkappa_\varrho$ resp. λ_τ mit $\varkappa_\tau$ vertauscht, so erhält man ein neues Glied (vgl. § 2), welches a_0^2 resp. b_0^2 zum Factor hat. Umgekehrt, hat G einen Factor a_0^2 resp. b_0^2, so kann man aus G ein neues Glied erzeugen, welches die beiden Factoren a_0 und b_0 besitzt, indem man eine der Nullen der a resp. b mit dem correspondirenden Index der b resp. a vertauscht.

§ 10. **Reziproke Permutationen und reziproke Glieder.**

Erhält man eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots m + n$ aus den Zahlen $\varkappa_1 + 1, \varkappa_2 + 2 \cdots \varkappa_n + n, \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 2, \cdots \lambda_m + m$, so kann man aus den letzteren eine zweite Permutation q dadurch

ableiten, dass man sie von $m+n+1$ abzieht und dann die so entstehenden Zahlen in der Weise anordnet, dass man sowohl die ersten n, als auch die letzten m in umgekehrter Ordnung schreibt. Dies folgt daraus, dass die ausgerechneten Zahlen alle unter einander verschieden, $\geqq 1$, und $\leqq m+n$ sind. Die Permutationen

(13) $p = \varkappa_1 + 1, \varkappa_2 + 2, \cdots \varkappa_n + n, \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 2, \cdots \lambda_m + m$

und

$$(14) \begin{cases} q = m - \varkappa_n + 1, m - \varkappa_{n-1} + 2 \cdots m - \varkappa_1 + n, \\ \quad n - \lambda_m + 1, n - \lambda_{m-1} + 2 \cdots n - \lambda_1 + m \end{cases}$$

nennen wir reziproke. Der Permutation p entspricht das Glied

$$G = (-1)^i a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m}$$
$$= (-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

und der Permutation q entspricht das Glied

$$(15) \begin{cases} H = (-1)^i a_{m-\varkappa_n} a_{m-\varkappa_{n-1}} \cdots a_{m-\varkappa_1} b_{n-\lambda_m} b_{n-\lambda_{m-1}} \cdots b_{n-\lambda_1} \\ \quad = (-1)^i a_{m-r_\mu}^{p_\mu} a_{m-r_{\mu-1}}^{p_{\mu-1}} \cdots a_{m-r_1}^{p_1} b_{n-s_\nu}^{q_\nu} b_{n-s_{\nu-1}}^{q_{\nu-1}} \cdots b_{n-s_1}^{q_1}. \end{cases}$$ *)

Wir nennen G und H reziproke Glieder. Sie haben denselben Coefficienten in der Entwickelung der Determinante. Die Factoren A und B sind bei reziproken Gliedern auch reziprok. Die Indices und Exponenten von H sind durch die Relationen verbunden:

$$(16) \qquad p_\mu + p_{\mu-1} + \cdots + p_1 = n,$$

$$(17) \qquad q_\nu + q_{\nu-1} + \cdots + q_1 = m,$$

$$(18) \begin{cases} p_\mu(m - r_\mu) + p_{\mu-1}(m - r_{\mu-1}) + \cdots + q_\nu(n - s_\nu) \\ \quad + q_{\nu-1}(n - s_{\nu-1}) + \cdots = mn, \end{cases}$$

$$(19) \quad g_1' = mn - g_1 = p_\mu(m - r_\mu) + \cdots + p_1(m - r_1) = g_2,$$

$$(20) \quad g_2' = mn - g_2 = q_\nu(n - s_\nu) + \cdots + q_1(n - s_1) = g_1,$$

$$(21) \qquad g_1' + g_2' = g' = mn.$$

---

*) Der Substitution $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m+n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{m+n} \end{pmatrix}$ entspricht das Glied G. Der Substitution $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & m+n \\ N - i_n & N - i_{n-1} & \cdots & N - i_1 & N - i_{m+n} & \cdots & N - i_{n+1} \end{pmatrix}$ entspricht das Glied H, wo die i sich auf die Colonnen von $\Delta_{m,n}$ beziehen und $i_\varrho = \varkappa_\varrho + \varrho$, $i_{n+\varrho} = \lambda_\varrho + \varrho$, $N = m+n+1$, und $\operatorname{mod} s_1 = (-1)^{mn} \operatorname{mod} s$ sind.

III. Normal-Formen.

§ 11. Definition der Normal-Formen (Mutter-Formen).

Alle Glieder G der Determinate $\varDelta_{m,n}$ haben mindestens einen der Factoren a_0, b_0 und mindestens einen der Factoren a_m, b_n. Es giebt aber auch Glieder, welche drei oder vier derselben besitzen. Diejenigen, bei denen der letztere Fall eintritt, also $r_1 = 0$, $s_1 = 0$, $m - r_\mu = 0$, $n - s_\nu = 0$, nennen wir Normal- oder Mutter-Formen und bezeichnen sie durch

(22) $$N = (-1)^i a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}.$$

Ist G eine Normal-Form, so sind die Factoren A und B von G auch Normal-Formen. A hat einen Factor $a_0 a_m$ und B hat einen Factor $b_0 b_n$. Nach der Methode von § 9 kann man, in gewissen Fällen, aus einer Formal-Form N ein anderes Glied der Determinante $\varDelta_{m,n}$ erzeugen, welches keine Normal-Form ist.

Zwischen den Indices und Exponenten der Normal-Form N bestehen die Relationen:

(23) $$p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = n,$$

(24) $$q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu = m,$$

(25) $$p_2 r_2 + \cdots + p_\mu m = g_1,$$

(26) $$q_2 s_2 + \cdots + q_\nu n = g_2,$$

(27) $$g_1 + g_2 = mn.$$

§ 12. Reziproke Normal-Formen.

Nach § 10 entspricht der Normal-Form

$$N = (-1)^i a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$$

die Normal-Form

(28) $$R = (-1)^i a_0^{p_\mu} a_{m-r_{\mu-1}}^{p_{\mu-1}} \cdots a_m^{p_1} b_0^{q_\nu} \cdots b_n^{q_1}.$$

Es bestehen zwischen den Indices und Exponenten dieser reziproken Normal-Form die folgenden Relationen:

(29) $$p_\mu + p_{\mu-1} + \cdots + p_1 = n,$$

(30) $$q_\nu + q_{\nu-1} + \cdots + q_1 = m,$$

(31) $$g_1' = mn - g_1 = p_{\mu-1}(m - r_{\mu-1}) + \cdots + p_1 m,$$

(32) $$g_2' = mn - g_2 = q_{\nu-1}(n - s_{\nu-1}) + \cdots + q_1 n,$$

(33) $$g_1' + g_2' = g' = mn.$$

Formeln (29), (31) bestehen zwischen den Indices der Factoren von A und (30), (32) zwischen den Indices der Factoren von B.

Nach § 6 sind die Factoren

(34) $$A = a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu}$$

und

(35) $$A' = a_0^{p_\mu} a_{m-r_{\mu-1}}^{p_{\mu-1}} \cdots a_m^{p_1}$$

reziprok und ebenso die Factoren

(36) $$B = b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$$

und

(37) $$B' = b_0^{q_\nu} b_{n-s_{\nu-1}}^{q_{\nu-1}} \cdots b_n^{q_1}.$$

IV. Reducible Formen.

§ 13. Sonstige Glieder.

Die Normal-Formen $N = (-1)^i a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$ haben die vier Factoren a_0, b_0, a_m, b_n; die übrigen Glieder, G, jedoch haben nur zwei oder drei derselben. Wir wollen alle diese Glieder auf Glieder niederer Determinanten reduciren und unterscheiden vier Arten:

1. Solche, welche nicht den Factor a_m, also den Factor b_n besitzen.
2. „ „ „ „ „ b_n, „ „ „ a_m „
3. „ „ „ „ „ a_0, „ „ „ b_0 „
4. „ „ „ „ „ b_0, „ „ „ a_0 „

Diese vier Arten von Gliedern G stehen in Beziehung zu einander. Vertauscht man A mit B, so gehen die Glieder der zweiten und vierten Art in Glieder der ersten und dritten Art über. Gehört G der dritten oder vierten Art an, so gehört das reziproke Glied H der ersten oder zweiten Art an.

V. Die Producte P.

§ 14. Definition der Producte P.

Wir wollen jetzt Producte

$$P = a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q^1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

einführen, welche wir später gebrauchen werden; die r und s sind gut geordnet. P entsteht aus dem Gliede G dadurch, dass wir von der Bedingung, dass $\varkappa_1 + 1, \cdots \varkappa_n + n, \lambda_1 + 1, \cdots \lambda_m + m$ eine Permutation bilden, absehen, und ausserdem das Vorzeichen weglassen. Ebenso wie die G sollen auch die P mindestens einen der Factoren a_0, b_0 und mindestens einen der Factoren a_m, b_n enthalten. Die Definition der P lautet:

$$(38)\quad P = a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

enthält mindestens einen der Factoren a_0, b_0, und mindestens einen der Factoren a_m, b_n, die $\varkappa, \lambda, r, s, p, q$ sind $\geqq 0$, und

$$(39)\quad \begin{cases} \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m \\ = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + q_1 s_1 + q_2 s_2 + \cdots = mn. \end{cases}$$

§ 15. Folgerungen aus der Definition von P.

Nach der obigen Definition von P entspricht jedem Gliede der Determinante $\varDelta_{m,n}$ ein Product P; das Umgekehrte ist nicht immer der Fall. Im Gegentheil, es giebt viele Producte P, denen kein Glied der Determinante $\varDelta_{m,n}$ entspricht. Um alle Glieder G der Determinante zu erhalten, bilden wir zunächst alle Producte P; sodann wählen wir unter ihnen diejenigen aus, welche Permutationen p liefern, und versehen sie schliesslich mit dem zugehörigen Vorzeichen (vgl. § 6). Wollen wir die übrigen Producte als Glieder der Determinante ansehen, so haben sie verschwindende Coefficienten.

§ 16. Beziehungen zwischen den P und den G.

Ebenso wie wir im § 7 G in die beiden Factoren

$$A = a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu}$$

$$B = b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_m} = b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

gespalten haben, spalten wir die Producte P in die Factoren A und B. Was wir nun in § 7 in Betreff der Factoren A und B von G gesagt haben, gilt gleichfalls für die Factoren A und B von P; ausgenommen sind die Eigenschaften, welche sich auf die Permutationen beziehen. Demgemäss gelten die Formeln (2), (4)$\cdots$(12) auch für die P. Im § 10 haben wir G und H als reziproke Glieder der Determinante $\varDelta_{m,n}$ definirt; analog bezeichnen wir auch hier

(40) $$Q = a_{m-r_\mu}^{p_\mu} a_{m-r_{\mu-1}}^{p_{\mu-1}} \cdots a_{m-r_1}^{p_1} b_{n-s_\nu}^{q_\nu} b_{n-s_{\nu-1}}^{q_{\nu-1}} \cdots b_{n-s_1}^{q_1}$$

und

$$P = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

als reziproke Producte. Dies gilt gleichfalls für die in den §§ 11 und 12 erwähnten Normal-Formen N und R; die ihnen entsprechenden Producte

(41) $$N = a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu},$$

(42) $$R = a_0^{p_\mu} a_{m-r_{\mu-1}}^{p_{\mu-1}} \cdots a_m^{p_1} b_0^{q_\nu} b_{n-s_{\nu-1}}^{q_{\nu-1}} \cdots b_n^{q_1}$$

nennen wir reziproke Normal-Producte. Im § 10 sind zwischen den Indices und den Exponenten von H die Relationen (16), (17)$\cdots$(21) aufgestellt worden; und in §§ 11, 12 die Relationen (23), (24)$\cdots$(27) und (29), (30)$\cdots$(33) zwischen den Indices und Exponenten von N und R. Alle diese Relationen gelten auch für die entsprechenden P. Endlich gilt alles, was wir in § 13 von vier Arten von Gliedern gesagt haben, gleichfalls für die Producte P; wir wollen sie auf niedere Producte reduciren.

VI. Reduction.

§ 17. Die erste und zweite Reduction.

Im ersten Falle hat P nicht den Factor a_m und daher den Factor b_n. Im zweiten Falle hat P nicht den Factor b_n und daher den Factor a_m. P hat entweder die Form $a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$ oder die Form $a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$. Nach S. 2, 2) ist die Summe derjenigen Glieder von $R_{m,n}$, welche den Factor a_m resp. b_n nicht enthalten, $b_n R_{m-1,n}$ resp. $a_m R_{m,n-1}$. Wenn P in der Resultante $R_{m,n}$ vorkommt, so treten die Producte

$$P' = \frac{P}{b_n} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu - 1}$$

resp.

$$P' = \frac{P}{a_m} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu - 1} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

in den Resultanten $R_{m-1,n}$, $R_{m,n-1}$ auf. Fahren wir in unserer Untersuchung fort, so können wir weiter mit b_n oder a_m dividiren.

Haben wir mit $b_n^{m-r_\mu}$ resp. $a_m^{n-s_\nu}$ dividirt, so gelangen wir zu den reducirten Formen

$$(43)\qquad P_1 = \frac{P}{b_n^{m-r_\mu}} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu - m + r_\mu},$$

$$(44)\qquad P_1 = \frac{P}{a_m^{n-s_\nu}} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu - n + s_\nu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}.$$

Diese Producte treten in den Resultanten $R_{r_\mu, n}$ resp. R_{m, s_ν} auf, sobald als P ein Glied von $R_{m,n}$ war. Das Gewicht g_1 von A hat sich entweder hierbei gar nicht geändert oder um $m(n - s_\nu)$ vermindert.

§ 18. Die dritte und vierte Reduction.

Producte P, welche den Factor a_0 nicht besitzen (dritter Fall), haben den Factor b_0, und Producte P, welche den Factor b_0 nicht besitzen (vierter Fall), haben den Factor a_0. Sie sind in den Formen

$$a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu} \text{ resp. } a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

enthalten. Die Summe derjenigen Glieder von $R_{m,n}$, welche a_0 nicht enthalten, ist $b_0 R^1_{m-1,n}$ und die Summe derjenigen Glieder, welche b_0 nicht enthalten, ist $a_0 R^1_{m,n-1}$ (S. 2, 2)). Im dritten Falle dividiren wir mit b_0 und vermindern die Indices der a um 1; im vierten Falle dividiren mit a_0 und vermindern die Indices der b um 1. Sobald als P ein Glied der Resultante $R_{m,n}$ ist, sind die entstehenden Producte Glieder der Resultante $R_{m-1,n}$, $R_{m,n-1}$. Wir fahren mit diesem Process so lange fort, bis die Indices r_1 und s_1 verschwinden und gelangen so zu den Producten

$$(45)\qquad P_1 = a_0^{p_1} a_{r_2 - r_1}^{p_2} \cdots a_{r_\mu - r_1}^{p_\mu} b_0^{q_1 - r_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

$$(46)\qquad P_1 = a_0^{p_1 - s_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2 - s_1}^{q_1} \cdots b_{s_\nu - s_1}^{q_\nu},$$

welche in Resultanten $R_{m-r_1, n}$, $R_{m, n-s_1}$ auftreten. Das Gewicht g_1 von A ist entweder um nr_1 vermindert oder hat sich nicht geändert.

§ 19. Die Differenzen $R_{m,n} - b_n R_{m-1,n}$, $R_{m,n} - a_m R_{m,n-1}$, $R_{m,n} - b_0 R^1_{m-1,n}$, $R_{m,n} - a_0 R^1_{m,n-1}$.

Das Product $b_n R_{m-1,n}$ ist die Summe aller Glieder von $R_{m,n}$, welche den Factor a_m nicht enthalten; die Differenz $R_{m,n} - b_n R_{m-1,n}$ ist demgemäss die Summe aller Glieder der Resultante $R_{m,n}$, welche

den Factor a_m enthalten. Ebenso ist die Differenz $R_{m,n} - a_m R_{m,n-1}$ die Summe aller Glieder von $R_{m,n}$, welche den Factor b_n enthalten. Die Differenzen $R_{m,n} - b_0 R^{1}_{m-1,n}$, $R_{m,n} - a_0 R^{1}_{m,n-1}$ bestehen aus den Gliedern von $R_{m,n}$, welche die Factoren a_0 resp. b_0 enthalten.

§ 20. Die Differenzen $R_{m,n} - b_0 R^{1}_{m-1,n} - a_0 R^{1}_{m,n-1}$ und $R_{m,n} - b_n R_{m-1,n} - a_m R_{m,n-1}$.

Die Differenz $R_{m,n} - b_0 R^{1}_{m-1,n} - a_0 R^{1}_{m,n-1}$ ist die Summe aller derjenigen Glieder der Resultante $R_{m,n}$, welche den Factor $a_0 b_0$ besitzen. Hierbei unterscheiden wir drei Fälle:

1. Diese Glieder haben nicht den Factor a_m, also den Factor b_n.
2. Sie haben nicht den Factor b_n, also a_m.
3. Sie haben beide Factoren a_m, b_n. Im letzteren Falle sind sie Normal-Formen. Zur Reduction dieser Formen können nur solche erster und zweiter Art benützt werden. Die Differenz

$$R_{m,n} - b_n R_{m-1,n} - a_m R_{m,n-1}$$

ist die Summe aller derjenigen Glieder der Resultante $R_{m,n}$, welche den Factor $a_m b_n$ besitzen. Von diesen Gliedern lassen sich wieder drei Arten unterscheiden:

1. Solche, die den Factor a_0 nicht, also den Factor b_0 haben.
2. Solche, die nicht den Factor b_0, also den Factor a_0 haben.
3. Solche, die beide Factoren a_0, b_0 haben; die letzteren sind Normal-Formen. Bei der Reduction der reduciblen unter diesen Formen benützt man nur diejenigen der dritten und vierten Classe.

§ 21. Die Coefficienten der Producte P und P_1.

In den §§ 17, 18 haben wir gesehen, dass sich der Coefficient eines Productes bei Reduction nicht ändert. Die Coefficienten von P und P_1 stimmen in ihren respectiven Resultanten überein. Zwischen ihnen bestehen die Relationen:

$$(47)\quad r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,\Big|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu} = r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,\Big|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu - m + r_\mu},$$

$$(48)\quad r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \,\Big|\, s_1^{q_2} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu} = r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu - n + s_\nu} \,\Big|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu},$$

$$(49)\quad r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,\Big|\, 0^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu} = 0^{p_1} (r_2 - r_1)^{p_2} \cdots (r_\mu - r_1)^{p_\mu} \,\Big|\, 0^{q_1 - r_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu},$$

$$(50)\quad 0^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,\Big|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu} = 0^{p_1 - s_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,\Big|\, 0^{q_1} (s_2 - s_1)^{q_2} \cdots (s_\nu - s_1)^{q_\nu}.$$

Jedem Producte $P = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$ entspricht das reziproke Product $Q = a_{m-r_\mu}^{p_\mu} \cdots a_{m-r_1}^{p_1} b_{n-s_\nu}^{q_\nu} \cdots b_{n-s_1}^{q_1}$. Nach dem § 10 gilt die Gleichung:

$$
(51) \quad \begin{cases} r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu} \\ = (m - r_\mu)^{p_\mu} (m - r_{\mu-1})^{p_{\mu-1}} \cdots (m - r_1)^{p_1} \,| \\ \quad (n - s_\nu)^{q_\nu} (n - s_{\nu-1})^{q_{\nu-1}} \cdots (n - s_1)^{q_1}. \end{cases}
$$

§ 22. **Weitere Beziehungen zwischen den Indices und Exponenten.**

In den §§ 17, 18 haben wir das Product

$$P = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$$

auf die vier Producte P_1

$$a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu - m + r_\mu},$$

$$a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu - n + s_\nu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

$$a_0^{p_1} a_{r_2 - r_1}^{p_2} \cdots a_{r_\mu - r_1}^{p_\mu} b_0^{q_1 - r_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

$$a_0^{p_1 - s_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2 - s_1}^{q_2} \cdots b_{s_\nu - s_1}^{q_\nu}$$

reducirt.

In ihnen sind die Exponenten $\geqq 0$; hieraus ergeben sich die folgenden Relationen:

$$(52) \qquad q_\nu - m + r_\mu \geqq 0,$$

$$(53) \qquad p_\mu - n + s_\nu \geqq 0,$$

$$(54) \qquad q_1 - r_1 \geqq 0,$$

$$(55) \qquad p_1 - s_1 \geqq 0.$$

Ist in einer oder mehreren dieser Formeln das Gleichheits-Zeichen gemeint, so lassen sich weitere Reductionen vornehmen. Producte, bei denen auch nur eine dieser Relationen nicht erfüllt ist, haben, als Glieder der Resultante aufgefasst, verschwindende Coefficienten.

§ 23. **Weitere Reduction der Producte P. Vollständig reducible Glieder.**

In den vorigen Paragraphen gingen wir von Producten P aus und haben sie auf einfachere Producte P_1 reducirt. Wenn P_1 keine

Normal-Form ist, dann können wir die Reduction fortsetzen. Bei diesem Verfahren können zwei Fälle eintreten:

1. Wir gelangen zu Normal-Formen (Mutter-Formen).

2. Wir gelangen schliesslich zu den Coefficienten a_0, b_0 (resp. zu 1).

In letzterem Falle heisst P ein vollständig reducibles Glied. Ein solches enthält von den Grössen a_0, b_0 und von den Grössen a_m, b_n nur je eine als Factor. Diese Eigenschaft besitzen auch alle Producte, welche bei der Reduction auftreten.

§ 24. **Zusammengesetzte Reductionen.**

In den §§ 17, 18 haben wir vier Arten von Reductionen ausgeführt und jede derselben besonders behandelt. Nunmehr wollen wir sie zusammensetzen. Bei der Division von a_0 und a_m sowohl, als auch bei der Division von b_0 und b_n, sowie bei deren Potenzen, ist die Reihenfolge der Operationen gleichgültig. Sie bestehen in den vierten und zweiten resp. in den dritten und ersten Reductionen. Wir gehen nunmehr zu der Combination der ersten und vierten Reduction über. Wir wollen zuerst durch $a_0^{s_1}$ und dann durch eine Potenz von b mit dem höchsten Index dividiren; es entsteht hierbei dasselbe Resultat, als wenn wir zuerst mit einer Potenz von b mit dem höchsten Index dividiren und sodann mit $a_0^{s_1}$. In jedem dieser Fälle entsteht aus dem Producte

$$P = a_0^{r_1} a_{r_1}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$$

das Product

$$a_0^{p_1 - s_1} a_{r_1}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2 - s_1}^{q_2} \cdots b_{n-s_1}^{q_\nu - m + r_\mu}.$$

In derselben Weise können wir bei der Division mit $b_0^{r_1}$ und einer Potenz von a mit dem höchsten Index die Reihenfolge der Operationen vertauschen. Wie man auch Reductionen vornimmt, die Reihenfolge beeinflusst nicht das Resultat. Wir wollen sie in folgender Weise festsetzen. Zuerst dividiren wir abwechselnd durch Potenzen von solchen a und b, welche die höchsten Indices besitzen, d. h. wir führen die erste und zweite Reduction aus. Nachdem wir damit zu Ende gekommen sind, dividiren wir mit Potenzen von a_0 und b_0; es ist die dritte und vierte Reduction. So gelangen wir entweder zu einer bestimmten Normal-Form oder zu einem einfachen Element a_0 oder b_0 (resp. zu 1). In letzterem Falle war das Product vollständig reducibel.

§ 25. Reduction von P auf eine Normal-Form.

Das Product

$$P = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

wo $s_\nu = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu$, $r_\mu < q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu$, lässt sich durch die erste und zweite Reduction auf Producte

$$(56) \qquad a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_{\mu-\varkappa}}^{p_{\mu-\varkappa}} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_{\nu-\varkappa}}^{r_{\mu-\varkappa}-(q_1+q_2+\cdots+q_{\nu-\varkappa-1})}$$

und

$$(57) \qquad a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_{\mu-\varkappa}}^{s_{\nu-\varkappa-1}-(p_1+p_2+\cdots+p_{\mu-\varkappa-1})} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_{\nu-\varkappa-1}}^{q_{\nu-\varkappa-1}}$$

reduciren.

Diese Reduction kann so lange als

$$(58) \qquad r_{\mu-\varkappa} = q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-\varkappa-1},$$

$$(59) \qquad s_{\nu-\varkappa} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu-\varkappa}$$

ist, fortgeführt werden; sie hört auf:

1. wenn

$$(60) \qquad \begin{cases} s_{\nu-\varkappa} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu-\varkappa} \quad \text{und} \\ q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-\varkappa} > r_{\mu-\varkappa} > q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-\varkappa-1}, \end{cases}$$

2. wenn

$$(61) \qquad \begin{cases} r_{\mu-\varkappa} = q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-\varkappa-1} \quad \text{und} \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu-\varkappa} > s_{\nu-\varkappa-1} > p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu-\varkappa-1}. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(62) \qquad s_\nu = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu,$$

$$(63) \qquad r_\mu < q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu;$$

P besitzt den Factor b_n; d. h. in einem seiner Factoren b tritt der höchste Index n auf. Wenn hingegen in einem der Factoren a von P der höchste Index m auftritt, so kann man die vorige Methode dadurch abändern, dass man a mit b vertauscht.

Wenn bei der dritten und vierten Art der Reduction von P, $s_1 = 0$, $r_1 \neq 0$ ist, so gelangt man zu Producten

$$(64) \qquad a_0^{p_i} a_{r_{i+1}-r_i}^{p_{i+1}} \cdots a_{r_\mu - r_i}^{p_\mu} b_0^{q_i+q_{i-1}+\cdots+q_1-r_i} b_{s_{i+1}-s_i}^{q_{i+1}} \cdots b_{s_\nu - s_i}^{q_\nu},$$

wo

$$(65) \qquad \left.\begin{cases} r_\varkappa = q_1 + q_2 + \cdots + q_\varkappa \\ s_\varkappa = p_1 + p_2 + \cdots + p_{\varkappa-1} \end{cases}\right\}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i-1},$$

$$(66) \qquad \left.\begin{cases} s_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1} \\ q_1 + q_2 + \cdots + q_{i-1} < r_i < q_1 + q_2 + \cdots + q_i \end{cases}\right\},$$

oder

(67) $a_0^{p_i + p_{i-1} + \cdots + p_1 - s_{i+1}} a_{r_{i+1} - r_i}^{p_{i+1}} \cdots a_{r_\mu - r_i}^{p_\mu} b_0^{q_{i+1}} b_{s_{i+2} - s_{i+1}}^{q_{i+2}} \cdots b_{s_\nu - s_{i+1}}^{q},$

wo

(68) $$\left.\begin{cases} r_\varkappa = q_1 + q_2 + \cdots + q_\varkappa \\ s_\varkappa = p_1 + p_2 + \cdots + p_{\varkappa-1} \end{cases}\right\}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i},$$

(69) $p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1} < s_{i+1} < p_1 + p_2 + \cdots + p_i.$

Wenn in P, $r_1 = 0$, $s_1 \neq 0$, so können ähnliche Resultate durch Vertauschung von a und b erzielt werden. Wenn im Laufe der Reduction die Indices und Exponenten eine der Formeln

(70) $q_1 + q_2 + \cdots + q_{\mu-i} < r_{\mu-i} < q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-i-1},$

oder

(71) $p_1 + p_2 + \cdots + p_{\nu-i-1} < s_{\nu-i} < p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu-i}$

befriedigen, so verschwindet in der Resultante der Coefficient von P. Analoge Formeln für das Verschwinden der Coefficienten finden wir im Falle, dass $s_\nu \neq n$, $s_1 \neq 0$, indem wir p mit q und r mit s vertauschen; sie lauten

(72) $p_1 + p_2 + \cdots + p_{\nu-i} < s_{\nu-i} < p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu-i-1},$

(73) $q_1 + q_2 + \cdots + q_{\mu-i-1} < r_{\mu-i} < q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-i}.$

§ 26. **Die Normal-Form (Mutter-Form), auf welche P reducirt wird.**

Die Producte P zerfallen in vier Classen je nach den Factoren a_0, b_0, a_m, b_n, welche sie besitzen.

Erste Classe: P besitzt die vier Factoren a_0, b_0, a_m, b_n, ist also eine Normal-Form.

Zweite Classe: P besitzt die beiden Factoren a_0, b_0 und nur einen der Factoren a_m, b_n.

Dritte Classe: P besitzt die beiden Factoren a_m, b_n und nur einen der Factoren a_0, b_0.

Vierte Classe: P besitzt nur einen der Factoren a_0, b_0 und nur einen der Factoren a_m, b_n. Bei den Producten der zweiten Classe wenden wir die erste und zweite Reduction an, und bei den Producten der dritten Classe die dritte und vierte Reduction. Die Producte der vierten Classe sind entweder vollständig reducibel oder lassen sich durch Zusammensetzung verschiedener Reductionen auf Normal-Formen zurückführen. Wir haben in dem vorigen Paragraphen die End-Formen angegeben, zu denen man bei Reduction

der Producte zweiter und dritter Classe gelangt. Für die Producte der vierten Classe lauten diese End-Formen:

$$(74)\quad N_{\mu,\nu} = a^{p_\lambda - \alpha}_{r_\lambda - \varrho} a^{p_{\lambda+1}}_{r_{\lambda+1} - \varrho} \cdots a^{p_\tau - \gamma}_{r_\tau - \varrho} b^{q_\varkappa - \beta}_{s_\varkappa - \sigma} b^{q_{\varkappa+1}}_{s_{\varkappa+1} - \sigma} \cdots b^{q_\pi - \delta}_{s_\pi - \sigma},$$

wo $r_\lambda = \varrho$, $r_\tau = \mu + \varrho$, $s_\varkappa = \sigma$, $s_\pi = \nu + \sigma$, und wo mindestens eine der Zahlen α, β und mindestens eine der Zahlen γ, δ verschwindet. $N_{\mu,\nu}$ ist eine Normal-Form der Resultante $R_{\mu,\nu}$.

§ 27. Die Coefficienten bei Reductionen.

Die Coefficienten $C_{m,n} = r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu}$ der Producte $P = a^{p_1}_{r_1} a^{p_2}_{r_2} \cdots a^{p_\mu}_{r_\mu} b^{q_1}_{s_1} b^{q_2}_{s_2} \cdots b^{q_\nu}_{s_\nu}$ lassen sich denselben Reductionen unterwerfen wie die P selbst. Bei ihnen aber sind sie nur formaler Art und ändern den Werth nicht. Die $C_{m,n}$ verschwinden, wenn auch nur eine der Bedingungen (70), (71) ... (73) von § 25 erfüllt wird. Wir können allgemein schreiben

$$C_{m,n} = C_{\mu,\nu},$$

d. h.

$$(75)\quad \begin{cases} r_1^{p_1} r_2^{p_2} \cdots r_\mu^{p_\mu} \,|\, s_1^{q_1} s_2^{q_2} \cdots s_\nu^{q_\nu} \\ = (r_\lambda - \varrho)^{p_\lambda - \alpha} (r_{\lambda+1} - \varrho)^{p_{\lambda+1}} \cdots (r_\tau - \varrho)^{p_\tau - \gamma} \,| \\ \quad (s_\varkappa - \sigma)^{q_\varkappa - \beta} (s_{\varkappa+1} - \sigma)^{q_{\varkappa+1}} \cdots (s_\pi - \sigma)^{q_\pi - \delta}, \end{cases}$$

wo $r_\lambda = \varrho$, $r_\tau = \mu + \varrho$, $s_\varkappa = \sigma$, $s_\pi = \nu + \sigma$, und wo mindestens eine der Zahlen α, β und mindestens eine der Zahlen γ, δ verschwindet.

VII. Ableitung.

§ 28. Arten von Ableitungen.

Wir haben in den §§ 17, 18 die Producte P auf einfachere Producte P_1 reducirt. Umgekehrt können wir von niederen Producten P ausgehen und zu höheren Producten P_1 fortschreiten. Wir nennen diese P_1 Ableitungen von P; sie lassen sich im Sinne der §§ 17, 18 auf P reduciren. Der Coefficient von P in seiner Resultante $R_{m,n}$ stimmt mit dem Coefficienten jeder Ableitung P_1 in ihrer (höheren) Resultante überein. Ebenso wie wir dort vier verschiedene Arten von Reductionen ausgeführt haben, so wollen wir nunmehr in den folgenden Paragraphen vier verschiedene Arten von Ableitungen herstellen.

§ 29. **Erste und zweite Ableitung. Multiplication mit b_n und a_m.**

Multipliciren wir ein Product $P = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$, welches als Glied in einer Resultante $R_{m,n}$ auftritt, mit b_n und a_m, so erhalten wir Producte $b_n P$ und $a_m P$, welche Glieder von Resultanten $R_{m+1,n}$, $R_{m,n+1}$ sind. Dies folgt daraus, dass nach S. 2, 2) diejenigen Glieder dieser Resultanten, welche die Factoren a_{m+1} und b_{n+1} nicht enthalten, Glieder der Producte $b_n R_{m,n}$ und $a_m R_{m,n}$ sind. Multipliciren wir weiter P mit b_n und a_m, so erhalten wir schliesslich Producte

(76) $$P_1 = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu} b_n^q$$

und

(77) $$P_1 = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} a_m^p b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

welche in Resultanten $R_{m+q,n}$, $R_{m,n+p}$ auftreten. Das Gewicht g_1 ändert sich hierbei entweder gar nicht oder wird um den Betrag von mp vermehrt.

§ 30. **Dritte und vierte Ableitung. Multiplication mit b_0 und a_0.**

Multipliciren wir das Product mit b_0 oder a_0, und vermehren wir gleichzeitig die Indices der a resp. b um 1, so entstehen Producte

$$a_{r_1+1}^{p_1} a_{r_2+1}^{p_2} \cdots a_{r_\mu+1}^{p_\mu} b_0 b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

$$a_0 a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1+1}^{q_1} b_{s_2+1}^{q_2} \cdots b_{s_\nu+1}^{q_\nu},$$

welche Glieder von Resultanten $R_{m+1,n}$, $R_{m,n+1}$ sind. Dies folgt daraus, dass nach S. 2, 2) diejenigen Glieder der Resultanten $R_{m+1,n}$, $R_{m,n+1}$, welche die Factoren a_0, b_0 nicht enthalten, Glieder von Producten $b_0 R_{m,n}^1$, $a_0 R_{m,n}^{1}$ sind. Durch Wiederholung dieses Processes gelangen wir nach und nach zu Producten

(78) $$P_1 = a_{r_1+q}^{p_1} a_{r_2+q}^{p_2} \cdots a_{r_\mu+q}^{p_\mu} b_0^q b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu},$$

(79) $$P_1 = a_0^p a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1+p}^{q_1} b_{s_2+p}^{q_2} \cdots b_{s_\nu+p}^{q_\nu},$$

welche Glieder von Resultanten $R_{m+q,n}$, $R_{m,n+p}$ sind.

Diesesmal hat sich das Gewicht g_1 entweder um nq vermehrt oder nicht geändert.

§ 31. Multiplication mit irgend einer Combination der Potenzen von b_n, a_m, a_0, b_0.

In den zwei vorigen Paragraphen haben wir uns auf eine einzige Art der vier Operationen beschränkt. In jedem Falle blieb das Vorzeichen von P ungeändert. Bei der Multiplication mit Potenzen von b_n und a_0 bleibt das Gewicht g_1 ungeändert.

Bei der Multiplication mit a_m^p resp. b_0^q nimmt das Gewicht g_1 um mp resp. nq zu. Hieraus folgt: Bei der Multiplication mit irgend einer Combination der Potenzen $a_0^{\varkappa_1}, \cdots a_0^{\varkappa_\lambda}, b_{n_1}^{h_1}, \cdots b_{n_\tau}^{h_\tau}$, $a_{m_1}^{p_1}, a_{m_2}^{p_2}, \cdots a_{m_\varrho}^{p_\varrho}, b_0^{q_1}, b_0^{q_2}, \cdots b_0^{q_\sigma}$ bleibt das Vorzeichen von P ungeändert; dagegen nimmt das Gewicht g_1 um die Summe

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_\varrho p_\varrho + n_1 q_1 + n_2 q_2 + \cdots + n_\sigma q_\sigma$$

zu.

§ 32. Beschränkung auf zwei Operationen.

Wir haben das Product P von $R_{m,n}$ mit Potenzen von a_0, b_0, a_m, b_n multiplicirt und sind hierdurch zu Gliedern höherer Resultanten gelangt. Diese vier Operationen lassen sich auf einander zurückführen. In dem § 20 haben wir die Differenz

$$R_{m,n} - b_0 R^1_{m-1,n} - a_0 R^1_{m,n-1}$$

untersucht. Sie war die Summe derjenigen Glieder K der Resultante $R_{m,n}$, welche den Factor $a_0 b_0$ enthalten. Machen wir die Voraussetzung, dass sie aus Gliedern J von höheren Resultanten durch Reduction entstehen, so gehören diese Reductionen der ersten oder zweiten Art an. Sind also die J durch Ableitung entstanden, so gehören diese Ableitungen der ersten oder zweiten Art an. Es findet Multiplication mit b_n oder a_m statt. Im Speciellen wollen wir diese Processe mehrmals hinter einander ausführen und dabei abwechselnd mit der einen oder der anderen Potenz multipliciren, um ein vollständig reducibles Glied zu erhalten. Wir werden dieses im Folgenden des Näheren ausführen.

VIII. Vollständig reducible Glieder.

§ 33. Recurrenz-Formeln für vollständig reducible Glieder.

Nach dem § 20 sind

$$R_{m,n} - b_0 R^1_{m-1,n} - a_0 R^1_{m,n-1},\; R_{m,n} - b_n R_{m-1,n} - a_m R_{m,n-1}$$

die Summen aller derjenigen Glieder der Resultante $R_{m,n}$, welche die Factoren $a_0 b_0$ resp. $a_m b_n$ enthalten. Die Glieder der Resultante $R_{m,n}$ zerfallen in zwei Arten, je nachdem sie vollständig reducibel sind oder nicht. Die Summe der ersteren bezeichnen wir mit $V_{m,n}$, die der letzteren mit $U_{m,n}$. Also hat man

(80) $$R_{m,n} = V_{m,n} + U_{m,n},$$

(81) $$\begin{cases} R_{m,n} - b_0 R^1_{m-1,n} - a_0 R^1_{m,n-1} = V_{m,n} + U_{m,n} - b_0 V^1_{m-1,n} \\ \qquad - b_0 U^1_{m-1,n} - a_0 V^1_{m,n-1} - a_0 U^1_{m,n-1}. \end{cases}$$

Dieser letztere Ausdruck giebt die Summe derjenigen Glieder der Resultante $R_{m,n}$ an, welche den Factor $a_0 b_0$ enthalten. Da kein vollständig reducibles Glied einer Resultante die beiden Factoren a_0, b_0 enthält (vgl. § 23), so ist

$$V_{m,n} - b_0 V^1_{m-1,n} - a_0 V^1_{m,n-1} = 0,$$

oder

(82) $$V_{m,n} = b_0 V^1_{m-1,n} + a_0 V^1_{m,n-1}.$$

In ähnlicher Weise folgt

(83) $$V_{m,n} = b_n V_{m-1,n} + a_m V_{m,n-1}.$$

Die letzte dieser Formeln ergiebt sich auch aus der Theorie der reziproken Glieder (vgl. § 10). Die Formeln (82), (83) lehren, dass alle vollständig reduciblen Glieder von höheren Resultanten gebildet werden können, indem man solche von niederen Resultanten mehrmals und abwechselnd entweder mit Potenzen von a_0, b_0 oder mit Potenzen von a_m, b_n multiplicirt.

§ 34. Ableitungen von a_0.

Zunächst leiten wir aus a_0 eine Potenz $a_0^{p_1}$ ab. Um zu weiteren Formeln zu gelangen, multipliciren wir mit b_{p_1} resp. $b_{p_1}^{q_1}$ und erhalten

$a_0^{p_1} b_{p_1}^{q_1}$. Jetzt multipliciren wir weiter mit $a_{q_1}^{p_2}$ und erhalten $a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} b_{p_1}^{q_1}$. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir zu den Producten:

$$a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} b_{p_1}^{q_1}, \; a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} b_{p_1}^{q_1} b_{p_1+p_2}^{q_2}, \cdots$$

$$(84) \quad a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} a_{q_1+q_2}^{p_3} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho+1} b_{p_1}^{q_1} b_{p_1+p_2}^{q_2} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho},$$

oder

$$(85) \quad a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_{\varrho-1}}^{p_\varrho} b_{p_1}^{q_1} b_{p_1+p_2}^{q_2} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho}.$$

Das Product (84) entstand aus einem früheren durch Multiplication mit $a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho+1}$ und das Product (85) aus einem früheren durch Multiplication mit $b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho}$.

§ 35. Ableitungen von b_0.

Wie wir in dem § 34 mit a_0 verfahren haben, so leiten wir hier aus b_0 die Producte

$$(86) \quad a_{q_1}^{p_1} a_{q_1+q_2}^{p_2} a_{q_1+q_2+q_3}^{p_3} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho} b_0^{q_1} b_{p_1}^{q_2} b_{p_1+p_2}^{q_3} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho+1},$$

$$(87) \quad a_{q_1}^{p_1} a_{q_1+q_2}^{p_2} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho} b_0^{q_1} b_{p_1}^{q_2} b_{p_1+p_2}^{q_3} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_{\varrho-1}}^{q_\varrho}$$

ab.

Das Product (86) erhielten wir aus einem früheren durch Multiplication mit $b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho+1}$ und das Product (87) aus einem früheren durch Multiplication mit $a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho}$.

§ 36. Die Vorzeichen der Ableitungen von a_0 und b_0.

Nach dem § 31 bleibt das Vorzeichen $(-1)^i$ von G bei der Multiplication mit irgend einer Combination der Potenzen a_m^p, b_n^q ungeändert.

In den §§ 34, 35 fingen wir mit $G = (-1)^i a_0^{p_1} b_{p_1}^{q_1}$ oder $(-1)^i a_{q_1}^{p_1} b_0^{q_1}$ an.

Im ersten Falle ist i (vgl. § 1) gleich Null, weil die Permutation

$$p = 1, 2, \cdots p_1, p_1 + 1, p_1 + 2, \cdots p_1 + q_1$$

lautet und $g_1 = 0$ ist; mithin ist das Vorzeichen der zwei ersten Arten von Ableitungen immer $(-1)^0 = +1$.

Im zweiten Falle ist $i = 2g_1$, weil die Permutation

$$p = q_1 + 1,\ q_1 + 2, \cdots q_1 + p_1,\ 1,\ 2, \cdots q_1$$

lautet, d. h. die Anzahl der Derangements $p_1 q_1 = g_1$ ist; mithin ist das Vorzeichen der zwei letzten Arten von Ableitungen auch

$$(-1)^{2g_1} = +1.$$

§ 37. Übergang zu den vollständig reduciblen Gliedern von $R_{m,n}$.

Im § 23 haben wir von vollständig reduciblen Gliedern gesprochen, nämlich von solchen, welche sich auf a_0 und b_0 (resp. 1) reduciren lassen, also Ableitungen dieser Grössen sind. Sie sind in einer der vier Formen (vgl. §§ 34, 35)

$$a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} a_{q_1+q_2}^{p_3} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho+1} b_{p_1}^{q_1} b_{p_1+p_2}^{q_2} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho},$$

$$a_0^{p_1} a_{q_1}^{p_2} a_{q_1+q_2}^{p_3} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_{\varrho-1}}^{p_\varrho} b_{p_1}^{q_1} b_{p_1+p_2}^{q_2} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho},$$

$$a_{q_1}^{p_1} a_{q_1+q_2}^{p_2} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho} b_0^{q_1} b_{p_1}^{q_2} b_{p_1+p_2}^{q_3} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\varrho}^{q_\varrho+1},$$

$$a_{q_1}^{p_1} a_{q_1+q_2}^{p_2} \cdots a_{q_1+q_2+\cdots+q_\varrho}^{p_\varrho} b_0^{q_1} b_{p_1}^{q_2} b_{p_1+p_2}^{q_3} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_{\varrho-1}}^{q_\varrho}$$

enthalten. Ist $G = (-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$ vollständig reducibel, so stimmt sein Werth mit einer dieser vier Formen überein.

§ 38. Die vollständig reduciblen Glieder der Resultante $R_{m,n}$.

Ist ein Glied $G = (-1)^i a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_{s_1}^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_{s_\nu}^{q_\nu}$ der Resultante $R_{m,n}$ vollständig reducibel, so bezeichnen wir es mit $v_{m,n}$ und erhalten dafür durch Vergleichung mit den vier Producten des § 37 die Form

$$(88)\qquad v_{m,n} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_0^{r_1} b_{p_1}^{r_2-r_1} b_{p_1+p_2}^{r_3-r_2} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_\mu}^{m-r_\mu};$$

für das erste Product ist $r_1 = 0,\ r_\mu = m,\ s_1 \neq 0,\ s_\nu \neq n$,
„ „ zweite „ „ $r_1 = 0,\ r_\mu \neq m,\ s_1 \neq 0,\ s_\nu = n$,
„ „ dritte „ „ $r_1 \neq 0,\ r_\mu \neq m,\ s_1 = 0,\ s_\nu = n$,
„ „ vierte „ „ $r_1 \neq 0,\ r_\mu = m,\ s_1 = 0,\ s_\nu \neq n$.

Die Indices und Exponenten dieses $v_{m,n}$ lassen sich aus dem ersten Factor $A = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu}$ berechnen; zu jedem A gehört ein und nur ein vollständig reducibles Glied der Resultante $R_{m,n}$.

Nach § 7 fanden wir alle A aus den $\binom{m+n}{n}$ Combinationen zu n Elementen von den Zahlen $0, 1, \cdots m$. Man erhält alle $\binom{m+n}{n}$ vollständig reducible Glieder der Resultante $R_{m,n}$ aus den Combinationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ der Zahlen $0, 1, \cdots m$.

§ 39. Die vollständig reduciblen Glieder der Resultante $R_{m,n}^{\varrho,\sigma}$.

Wenn wir anstatt der Formen

$$f = a_0 x^m - a_1 x^{m-1} + \cdots (-1)^m a_m$$

und

$$\varphi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

die zwei Formen

$$f_\varrho = a_\varrho x^m - a_{\varrho+1} x^{m-1} + \cdots (-1)^m a_{\varrho+m}$$

und

$$\varphi_\sigma = b_\sigma x_n + b_{\sigma+1} x^{n-1} + \cdots + b_{\sigma+n}$$

zu Grunde legen und das Verfahren der §§ 35—38 anwenden, so gelangen wir zu dem vollständig reduciblen Gliede

$$(89)\quad v_{m,n}^{\varrho,\sigma} = a_{\varrho+r_1}^{p_1} a_{\varrho+r_2}^{p_2} \cdots a_{\varrho+r_\mu}^{p_\mu} b_\sigma^{r_1} b_{\sigma+p_1}^{r_2-r_1} b_{\sigma+p_1+p_2}^{r_3-r_2} \cdots b_{\sigma+p_1+p_2+\cdots+p_\mu}^{m-r_\mu}$$

der Resultante $R_{m,n}^{\varrho,\sigma}$ der zwei Formen f_ϱ und φ_σ. Es lässt sich nämlich auf a_ϱ oder b_σ (resp. auf 1) reduciren.

§ 40. Die Summe der vollständig reduciblen Glieder.

In dem § 33 haben wir die Recurrenz-Formeln (82), (83) für die vollständig reduciblen Glieder der Resultante $R_{m,n}$ aufgestellt. Nach dem § 38 sind die vollständig reduciblen Glieder von $R_{m,n}$ in der Form

$$v_{m,n} = a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu} b_0^{r_1} b_{p_1}^{r_2-r_1} b_{p_1+p_2}^{r_3-r_2} \cdots b_{p_1+p_2+\cdots+p_{\mu-1}}^{r_\mu - r_{\mu-1}} b_n^{m-r_\mu}$$

enthalten. Hieraus folgt die Formel

$$(90)\quad \begin{cases} V_{m,n} = \Sigma v_{m,n} = b_0 \Sigma v_{m-1,n}^{1} + a_0 \Sigma v_{m,n-1}^{1} \\ \qquad = b_n \Sigma v_{m-1,n} + a_m \Sigma v_{m,n-1}, \end{cases}$$

welche uns drei Methoden zur Berechnung von $V_{m,n}$ liefert:

1. Wir können die $\binom{m+n}{n}$ A der Form $a_{r_1}^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_{r_\mu}^{p_\mu}$ (§§ 7, 38) und aus ihnen die B durch die Formel

$$(91)\quad B = b_0^{r_1} b_{p_1}^{r_2-r_1} b_{p_1+p_2}^{r_3-r_2} \cdots b_n^{m-r_\mu}$$

unmittelbar ableiten.

2. und 3. Wir fangen mit den niedrigsten Formen an und gelangen nach und nach durch wiederholten Gebrauch der Recurrenz-Formeln (82), (83) zu allen höheren Formen.

Als Beispiel wenden wir bei der Berechnung von $V_{5,4}$ die dritte Methode an, nämlich die Formel (83),

$$V_{m,n} = b_m V_{m-1,n} + a_m V_{m,n-1},$$

wobei wir bemerken, dass $V_{m,0} = b_0^m$, $V_{0,n} = a_0^n$ ist. Als Controlle der Berechnung wendet man die erste Methode an. Man hat die folgenden Resultate:

$$V_{1,1} = b_1 V_{01} + a_1 V_{10} = a_0 b_1 + a_1 b_0.$$

$$V_{2,1} = b_1 V_{11} + a_2 V_{20} = b_1(a_0 b_1 + a_1 b_0) + a_2 b_0^2 = a_0 b_1^2 + a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2.$$

$$V_{3,1} = b_1 V_{21} + a_3 V_{30} = a_0 b_1^3 + a_1 b_0 b_1^2 + a_2 b_0^2 b_1 + a_3 b_0^3.$$

$$V_{4,1} = b_1 V_{31} + a_4 V_{40} = a_0 b_1^4 + a_1 b_0 b_1^3 + a_2 b_0^2 b_1^2 + a_3 b_0^3 b_1 + a_4 b_0^4.$$

$$V_{5,1} = b_1 V_{41} + a_5 V_{50} = a_0 b_1^5 + a_1 b_0 b_1^4 + a_2 b_0^2 b_1^3 + a_3 b_0^3 b_1^2 + a_4 b_0^4 b_1 + a_5 b_0^5.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir:

$$V_{2,2} = a_1^2 b_0 b_2 + a_0 a_1 b_1 b_2 + a_0^2 b_2^2 + a_0 a_2 b_1^2 + a_1 a_2 b_0 b_1 + a_2^2 b_0^2.$$

$$V_{3,2} = a_1^2 b_0 b_2^2 + a_0 a_1 b_1 b_2^2 + a_0^2 b_2^3 + a_0 a_2 b_1^2 b_2 + a_1 a_2 b_0 b_1 b_2 + a_2^2 b_0^2 b_2 + a_0 a_3 b_1^3 + a_1 a_3 b_0 b_1^2 + a_2 a_3 b_0^2 b_1 + a_3^2 b_0^3.$$

$$V_{4,2} = a_1^2 b_0 b_2^3 + a_0 a_1 b_1 b_2^3 + a_0^2 b_2^4 + a_0 a_2 b_1^2 b_2^2 + a_1 a_2 b_0 b_1 b_2^2 + a_2^2 b_0^2 b_2^2 + a_0 a_3 b_1^3 b_2 + a_1 a_3 b_0 b_1^2 b_2 + a_2 a_3 b_0^2 b_1 b_2 + a_3^2 b_0^3 b_2 + a_0 a_4 b_1^4 + a_1 a_4 b_0 b_1^3 + a_2 a_4 b_0^2 b_1^2 + a_3 a_4 b_0^3 b_1 + a_4^2 b_0^4.$$

$$V_{5,2} = a_1^2 b_0 b_2^4 + a_0 a_1 b_1 b_2^4 + a_0^2 b_2^5 + a_0 a_2 b_1^2 b_2^3 + a_1 a_2 b_0 b_1 b_2^3 + a_2^2 b_0^2 b_2^3 + a_0 a_3 b_1^3 b_2^2 + a_1 a_3 b_0 b_1^2 b_2^2 + a_2 a_3 b_0^2 b_1 b_2^2 + a_3^2 b_0^3 b_2^2 + a_0 a_4 b_1^4 b_2 + a_1 a_4 b_0 b_1^3 b_2 + a_2 a_4 b_0^2 b_1^2 b_2 + a_3 a_4 b_0^3 b_1 b_2 + a_4^2 b_0^4 b_2 + a_0 a_5 b_1^5 + a_1 a_5 b_1^4 + a_2 a_5 b_0^2 b_1^3 + a_3 a_5 b_0^3 b_1^2 + a_4 a_5 b_0^4 b_1 + a_5^2 b_0^5.$$

$$V_{3,3} = a_0 a_2^2 b_1^2 b_3 + a_1 a_2^2 b_0 b_1 b_3 + a_2^3 b_0^2 b_3 + a_1^2 a_2 b_0 b_2 b_3 + a_0 a_1 a_2 b_1 b_2 b_3 + a_0^2 a_2 b_2^2 b_3 + a_1^3 b_0 b_3^2 + a_0 a_1^2 b_1 b_3^2 + a_0^2 a_1 b_2 b_3^2 + a_0^3 b_3^3 + a_1^2 a_3 b_0 b_2^2 + a_0 a_1 a_3 b_1 b_2^2 + a_0^2 a_3 b_2^3 + a_0 a_2 a_3 b_1^2 b_2 + a_1 a_2 a_3 b_0 b_1 b_2 + a_2^2 a_3 b_0^2 b_2 + a_0 a_3^2 b_1^3 + a_1 a_3^2 b_0 b_1^2 + a_2 a_3^2 b_0^2 b_1 + a_3^3 b_0^3.$$

$$
\begin{aligned}
V_{4,3} = {} & a_0 a_2^2 b_1^2 b_3^2 + a_1 a_2^2 b_0 b_1 b_3^2 + a_2^3 b_0^2 b_3^2 + a_1^2 a_2 b_0 b_2 b_3^2 + a_0 a_1 a_2 b_1 b_2 b_3^2 \\
& + a_0^2 a_2 b_2^2 b_3^2 + a_1^3 b_0 b_3^3 + a_0 a_1^2 b_1 b_3^3 + a_0^2 a_1 b_2 b_3^3 + a_0^3 b_3^4 + a_1^2 a_3 b_0 b_2^2 b_3 \\
& + a_0 a_1 a_3 b_1 b_2^2 b_3 + a_0^2 a_3 b_2^3 b_3 + a_0 a_2 a_3 b_1^2 b_2 b_3 + a_1 a_2 a_3 b_0 b_1 b_2 b_3 \\
& + a_2^2 a_3 b_0^2 b_2 b_3 + a_0 a_3^2 b_1^3 b_3 + a_1 a_3^2 b_0 b_1^2 b_3 + a_2 a_3^2 b_0^2 b_1 b_3 + a_3^3 b_0^3 b_3 \\
& + a_1^2 a_4 b_0 b_2^3 + a_0 a_1 a_4 b_1 b_2^3 + a_0^2 a_4 b_2^4 + a_0 a_2 a_4 b_1^2 b_2^2 + a_1 a_2 a_4 b_0 b_1 b_2^2 \\
& + a_2^2 a_4 b_0^2 b_2^2 + a_0 a_3 a_4 b_1^3 b_2 + a_1 a_3 a_4 b_0 b_1^2 b_2 + a_2 a_3 a_4 b_0^2 b_1 b_2 \\
& + a_3^2 a_4 b_0^3 b_2 + a_0 a_4^2 b_1^4 + a_1 a_4^2 b_0 b_1^3 + a_2 a_4^2 b_0^2 b_1^2 + a_3 a_4^2 b_0^3 b_1 + a_4^3 b_0^4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{5,3} = {} & a_0 a_2^2 b_1^2 b_3^3 + a_1 a_2^2 b_0 b_1 b_3^3 + a_2^3 b_0^2 b_3^3 + a_1^2 a_2 b_0 b_2 b_3^3 + a_0 a_1 a_2 b_1 b_2 b_3^3 \\
& + a_0^2 a_2 b_2^2 b_3^3 + a_1^3 b_0 b_3^4 + a_0 a_1^2 b_1 b_3^4 + a_0^2 a_1 b_2 b_3^4 + a_0^3 b_3^5 + a_1^2 a_3 b_0 b_2^2 b_3^2 \\
& + a_0 a_1 a_3 b_1 b_2^2 b_3 + a_0^2 a_3 b_2^3 b_3^2 + a_0 a_2 a_3 b_1^2 b_2 b_3^2 + a_1 a_2 a_3 b_0 b_1 b_2 b_3^2 \\
& + a_2^2 a_3 b_0^2 b_2 b_3^2 + a_0 a_3^2 b_1^3 b_3^2 + a_1 a_3^2 b_0 b_1^2 b_3^2 + a_2 a_3^2 b_0^2 b_1 b_3^2 + a_3^3 b_0^3 b_3^2 \\
& + a_1^2 a_4 b_0 b_2^3 b_3 + a_0 a_1 a_4 b_1 b_2^3 b_3 + a_0^2 a_4 b_2^4 b_3 + a_0 a_2 a_4 b_1^2 b_2^2 b_3 \\
& + a_1 a_2 a_4 b_0 b_1 b_2^2 b_3 + a_2^2 a_4 b_0^2 b_2^2 b_3 + a_0 a_3 a_4 b_1^3 b_2 b_3 + a_1 a_3 a_4 b_0 b_1^2 b_2 b_3 \\
& + a_2 a_3 a_4 b_0^2 b_1 b_2 b_3 + a_3^2 a_4 b_0^3 b_2 b_3 + a_0 a_4^2 b_1^4 b_3 + a_1 a_4^2 b_0 b_1^3 b_3 \\
& + a_2 a_4^2 b_0^2 b_1^2 b_3 + a_3 a_4^2 b_0^3 b_1 b_3 + a_4^3 b_0^4 b_3 + a_1^2 a_5 b_0 b_2^4 + a_0 a_1 a_5 b_1 b_2^4 \\
& + a_0^2 a_5 b_2^5 + a_0 a_2 a_5 b_1^2 b_2^3 + a_1 a_2 a_5 b_0 b_1 b_2^3 + a_2^2 a_5 b_0^2 b_2^3 + a_0 a_3 a_5 b_1^3 b_2^2 \\
& + a_1 a_3 a_5 b_0 b_1^2 b_2^2 + a_2 a_3 a_5 b_0^2 b_1 b_2^2 + a_3^2 a_5 b_0^3 b_2^2 + a_0 a_4 a_5 b_1^4 b_2 \\
& + a_1 a_4 a_5 b_0 b_1^3 b_2 + a_2 a_4 a_5 b_0^2 b_1^2 b_2 + a_3 a_4 a_5 b_0^3 b_1 b_2 + a_4^2 a_5 b_0^4 b_2 \\
& + a_0 a_5^2 b_1^5 + a_1 a_5^2 b_0 b_1^4 + a_2 a_5^2 b_0^2 b_1^3 + a_3 a_5^2 b_0^3 b_1^2 + a_4 a_5^2 b_0^4 b_1 + a_5^3 b_0^5 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{4,4} = {} & a_1^2 a_3^2 b_0 b_2^2 b_4 + a_0 a_1 a_3^2 b_1 b_2^2 b_4 + a_0^2 a_3^2 b_2^3 b_4 + a_0 a_2 a_3^2 b_1^2 b_2 b_4 \\
& + a_1 a_2 a_3^2 b_0 b_1 b_2 b_4 + a_2^2 a_3^2 b_0^2 b_2 b_4 + a_0 a_3^3 b_1^3 b_4 + a_1 a_3^3 b_0 b_1^2 b_4 \\
& + a_2 a_3^3 b_0^2 b_1 b_4 + a_3^4 b_0^3 b_4 + a_0 a_2^2 a_3 b_1^2 b_3 b_4 + a_1 a_2^2 a_3 b_0 b_1 b_3 b_4 \\
& + a_2^3 a_3 b_0^2 b_3 b_4 + a_1^2 a_2 a_3 b_0 b_2 b_3 b_4 + a_0 a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 b_4 \\
& + a_0^2 a_2 a_3 b_2^2 b_3 b_4 + a_1^3 a_3 b_0 b_3^2 b_4 + a_0 a_1^2 a_3 b_1 b_3^2 b_4 + a_0^2 a_1 a_3 b_2 b_3^2 b_4 \\
& + a_0^3 a_3 b_3^3 b_4 + a_0 a_2^3 b_1^2 b_4^2 + a_1 a_2^3 b_0 b_1 b_4^2 + a_2^4 b_0^2 b_4^2 + a_1^2 a_2^2 b_0 b_2 b_4^2 \\
& + a_0 a_1 a_2^2 b_1 b_2 b_4^2 + a_0^2 a_2^2 b_2^2 b_4^2 + a_1^3 a_2 b_0 b_3 b_4^2 + a_0 a_1^2 a_2 b_1 b_3 b_4^2 \\
& + a_0^2 a_1 a_2 b_2 b_3 b_4^2 + a_0^3 a_2 b_3^2 b_4^2 + a_1^4 b_0 b_4^3 + a_0 a_1^3 b_1 b_4^3 + a_0^2 a_1^2 b_2 b_4^3 \\
& + a_0^3 a_1 b_3 b_4^3 + a_0^4 b_4^4 + a_0 a_2^2 a_4 b_1^2 b_3^2 + a_1 a_2^2 a_4 b_0 b_1 b_3^2 + a_2^3 a_4 b_0^2 b_3^2 \\
& + a_1^2 a_2 a_4 b_0 b_2 b_3^2 + a_0 a_1 a_2 a_4 b_1 b_2 b_3^2 + a_0^2 a_2 a_4 b_2^2 b_3^2 + a_1^3 a_4 b_0 b_3^3 \\
& + a_0 a_1^2 a_4 b_1 b_3^3 + a_0^2 a_1 a_4 b_2 b_3^3 + a_0^3 a_4 b_3^4 + a_1^2 a_3 a_4 b_0 b_2^2 b_3
\end{aligned}
$$

$$+ a_0 a_1 a_3 a_4 b_1 b_2^2 b_3 + a_0^2 a_3 a_4 b_2^3 b_3 + a_0 a_2 a_3 a_4 b_1^2 b_2 b_3$$
$$+ a_1 a_2 a_3 a_4 b_0 b_1 b_2 b_3 + a_2^2 a_3 a_4 b_0^2 b_2 b_3 + a_0 a_3^2 a_4 b_1^3 b_3 + a_1 a_3^2 a_4 b_0 b_1^2 b_3$$
$$+ a_2 a_3^2 a_4 b_0^2 b_1 b_3 + a_3^3 a_4 b_0^3 b_3 + a_1^2 a_4^2 b_0 b_2^3 + a_0 a_1 a_4^2 b_1 b_2^3 + a_0^2 a_4^2 b_2^4$$
$$+ a_0 a_2 a_4^2 b_1^2 b_2^2 + a_1 a_2 a_4^2 b_0 b_1 b_2^2 + a_2^2 a_4^2 b_0^2 b_2^2 + a_0 a_3 a_4^2 b_1^3 b_2$$
$$+ a_1 a_3 a_4^2 b_0 b_1^2 b_2 + a_2 a_3 a_4^2 b_0^2 b_1 b_2 + a_3^2 a_4^2 b_0^3 b_2 + a_0 a_4^3 b_1^4 + a_1 a_4^3 b_0 b_1^3$$
$$+ a_2 a_4^3 b_0^2 b_1^2 + a_3 a_4^3 b_0^3 b_1 + a_4^4 b_0^4 .$$

$$V_{5,4} = a_1^2 a_3^2 b_0 b_2^2 b_4^2 + a_0 a_1 a_3^2 b_1 b_2^2 b_4^2 + a_0^2 a_3^2 b_2^3 b_4^2 + a_0 a_2 a_3^2 b_1^2 b_2 b_4^2$$
$$+ a_1 a_2 a_3^2 b_0 b_1 b_2 b_4^2 + a_2^2 a_3^2 b_0^2 b_2 b_4^2 + a_0 a_3^3 b_1^3 b_4^2 + a_1 a_3^3 b_0 b_1^2 b_4^2$$
$$+ a_2 a_3^3 b_0^2 b_1 b_4^2 + a_3^4 b_0^3 b_4^2 + a_0 a_2^2 a_3 b_1^2 b_3 b_4^2 + a_1 a_2^2 a_3 b_0 b_1 b_3 b_4^2$$
$$+ a_2^3 a_3 b_0^2 b_3 b_4^2 + a_1^2 a_2 a_3 b_0 b_2 b_3 b_4^2 + a_0 a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 b_4^2$$
$$+ a_0^2 a_2 a_3 b_2^2 b_3 b_4^2 + a_1^3 a_3 b_0 b_3^2 b_4^2 + a_0 a_1^2 a_3 b_1 b_3^2 b_4^2 + a_0^2 a_1 a_3 b_2 b_3^2 b_4^2$$
$$+ a_0^3 a_3 b_3^3 b_4^2 + a_0 a_2^3 b_1^2 b_4^3 + a_1 a_2^3 b_0 b_1 b_4^3 + a_2^4 b_0^2 b_4^3 + a_1^2 a_2^2 b_0 b_2 b_4^3$$
$$+ a_0 a_1 a_2^2 b_1 b_2 b_4^3 + a_0^2 a_2^2 b_2^2 b_4^3 + a_1^3 a_2 b_0 b_3 b_4^3 + a_0 a_1^2 a_2 b_1 b_3 b_4^3$$
$$+ a_0^2 a_1 a_2 b_2 b_3 b_4^3 + a_0^3 a_2 b_3^2 b_4^3 + a_1^4 b_0 b_4^4 + a_0 a_1^3 b_1 b_4^4 + a_0^2 a_1^2 b_2 b_4^4$$
$$+ a_0^3 a_1 b_3 b_4^4 + a_0^4 b_4^5 + a_0 a_2^2 a_4 b_1^2 b_3^2 b_4 + a_1 a_2^2 a_4 b_0 b_1 b_3^2 b_4$$
$$+ a_2^3 a_4 b_0^2 b_3^2 b_4 + a_1^2 a_2 a_4 b_0 b_2 b_3^2 b_4 + a_0 a_1 a_2 a_4 b_1 b_2 b_3^2 b_4$$
$$+ a_0^2 a_2 a_4 b_2^2 b_3^2 b_4 + a_1^3 a_4 b_0 b_3^3 b_4 + a_0 a_1^2 a_4 b_1 b_3^3 b_4 + a_0^2 a_1 a_4 b_2 b_3^3 b_4$$
$$+ a_0^3 a_4 b_3^4 b_4 + a_1^2 a_3 a_4 b_0 b_2^2 b_3 b_4 + a_0 a_1 a_3 a_4 b_1 b_2^2 b_3 b_4 + a_0^2 a_3 a_4 b_2^3 b_3 b_4$$
$$+ a_0 a_2 a_3 a_4 b_1^2 b_2 b_3 b_4 + a_1 a_2 a_3 a_4 b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 + a_2^2 a_3 a_4 b_0^2 b_2 b_3 b_4$$
$$+ a_0 a_3^2 a_4 b_1^3 b_3 b_4 + a_1 a_3^2 a_4 b_0 b_1^2 b_3 b_4 + a_2 a_3^2 a_4 b_0^2 b_1 b_3 b_4 + a_3^3 a_4 b_0^3 b_3 b_4$$
$$+ a_1^2 a_4^2 b_0 b_2^3 b_4 + a_0 a_1 a_4^2 b_1 b_2^3 b_4 + a_0^2 a_4^2 b_2^4 b_4 + a_0 a_2 a_4^2 b_1^2 b_2^2 b_4$$
$$+ a_1 a_2 a_4^2 b_0 b_1 b_2^2 b_4 + a_2^2 a_4^2 b_0^2 b_2^2 b_4 + a_0 a_3 a_4^2 b_1^3 b_2 b_4 + a_1 a_3 a_4^2 b_0 b_1^2 b_2 b_4$$
$$+ a_2 a_3 a_4^2 b_0^2 b_1 b_2 b_4 + a_3^2 a_4^2 b_0^3 b_2 b_4 + a_0 a_4^3 b_1^4 b_4 + a_1 a_4^3 b_0 b_1^3 b_4$$
$$+ a_2 a_4^3 b_0^2 b_1^2 b_4 + a_3 a_4^3 b_0^3 b_1 b_4 + a_4^4 b_0^4 b_4 + a_0 a_2^2 a_5 b_1^2 b_3^3$$
$$+ a_1 a_2^2 a_5 b_0 b_1 b_3^3 + a_2^3 a_5 b_0^2 b_3^3 + a_1^2 a_2 a_5 b_0 b_2 b_3^3 + a_0 a_1 a_2 a_5 b_1 b_2 b_3^3$$
$$+ a_0^2 a_2 a_5 b_2^2 b_3^3 + a_1^3 a_5 b_0 b_3^4 + a_0 a_1^2 a_5 b_1 b_3^4 + a_0^2 a_1 a_5 b_2 b_3^4 + a_0^3 a_5 b_3^5$$
$$+ a_1^2 a_3 a_5 b_0 b_2^2 b_3^2 + a_0 a_1 a_3 a_5 b_1 b_2^2 b_3^2 + a_0^2 a_3 a_5 b_2^3 b_3^2 + a_0 a_2 a_3 a_5 b_1^2 b_2 b_3^2$$
$$+ a_1 a_2 a_3 a_5 b_0 b_1 b_2 b_3^2 + a_2^2 a_3 a_5 b_0^2 b_2 b_3^2 + a_0 a_3^2 a_5 b_1^3 b_3^2 + a_1 a_3^2 a_5 b_0 b_1^2 b_3^2$$
$$+ a_2 a_3^2 a_5 b_0^2 b_1 b_3^2 + a_3^3 a_5 b_0^3 b_3^2 + a_1^2 a_4 a_5 b_0 b_2^3 b_3 + a_0 a_1 a_4 a_5 b_1 b_2^3 b_3$$
$$+ a_0^2 a_4 a_5 b_2^4 b_3 + a_0 a_2 a_4 a_5 b_1^2 b_2^2 b_3 + a_1 a_2 a_4 a_5 b_0 b_1 b_2^2 b_3$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_2^2 a_4 a_5 b_0^2 b_2^2 b_3 + a_0 a_3 a_4 a_5 b_1^3 b_2 b_3 + a_1 a_3 a_4 a_5 b_0 b_1^2 b_2 b_3 \\
&+ a_2 a_3 a_4 a_5 b_0^2 b_1 b_2 b_3 + a_3^2 a_4 a_5 b_0^3 b_2 b_3 + a_0 a_4^2 a_5 b_1^4 b_3 + a_1 a_4^2 a_5 b_0 b_1^3 b_3 \\
&+ a_2 a_4^2 a_5 b_0^2 b_1^2 b_3 + a_3 a_4^2 a_5 b_0^3 b_1 b_3 + a_4^3 a_5 b_0^4 b_3 + a_1^2 a_5^2 b_0 b_2^4 \\
&+ a_0 a_1 a_5^2 b_1 b_2^4 + a_0^2 a_5^2 b_2^5 + a_0 a_2 a_5^2 b_1^2 b_2^3 + a_1 a_2 a_5^2 b_0 b_1 b_2^3 + a_2^2 a_5^2 b_0^2 b_2^3 \\
&+ a_0 a_3 a_5^2 b_1^3 b_2^2 + a_1 a_3 a_5^2 b_0 b_1^2 b_2^2 + a_2 a_3 a_5^2 b_0^2 b_1 b_2^2 + a_3^2 a_5^2 b_0^3 b_2^2 \\
&+ a_0 a_4 a_5^2 b_1^4 b_2 + a_1 a_4 a_5^2 b_0 b_1^3 b_2 + a_2 a_4 a_5^2 b_0^2 b_1^2 b_2 + a_3 a_4 a_5^2 b^3 b_1 b_2 \\
&+ a_4^2 a_5^2 b_0^4 b_2 + a_0 a_5^3 b_1^5 + a_1 a_5^3 b_0 b_1^4 + a_2 a_5^3 b_0^2 b_1^3 + a_3 a_5^3 b_0^3 b_1^2 \\
&+ a_4 a_5^3 b_0^4 b_1 + a_5^4 b_0^5 .
\end{aligned}
$$

§ 41. Die vollständig reduciblen Glieder einer Resultante $R^{\varrho,\ \sigma}_{m-\varrho,\ n-\sigma}$.

In dem § 39 haben wir als Ausdruck des vollständig reduciblen Gliedes einer Resultante $R^{\varrho,\ \sigma}_{m,\ n}$ die Form

$$v^{\varrho,\ \sigma}_{m,\ n} = a^{p_1}_{\varrho+r_1} a^{p_2}_{\varrho+r_2} \cdots a^{p_\mu}_{\varrho+r_\mu} b^{r_1}_{\sigma} b^{r_2-r_1}_{\sigma+p_1} b^{r_3-r_2}_{\sigma+p_1+p_2} \cdots b^{m-r_\mu}_{\sigma+n}$$

entwickelt.

Da die Buchstaben m, n, ϱ, σ irgendwelche von einander unabhängige Werthe annehmen können, welche den Formeln $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ genügen, so dürfen wir m, n durch $m - \varrho$, $n - \sigma \ (\geqq 0)$ ersetzen und gelangen so zu den Formeln

$$(92)\left\{\begin{aligned} &\qquad\qquad v^{\varrho,\ \sigma}_{m-\varrho,\ n-\sigma} \\ &= a^{p_1}_{\varrho+r_1} a^{p_2}_{\varrho+r_2} \cdots a^{p_\mu}_{\varrho+r_\mu} b^{r_1}_{\sigma} b^{r_2-r_1}_{\sigma+p_1} b^{r_3-r_2}_{\sigma+p_1+p_2} \cdots b^{m-\varrho-r_\mu}_{\sigma+p_1+p_2+\cdots+p_\mu}, \end{aligned}\right.$$

wo $p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = n - \sigma$. Die Summe $V^{\varrho,\ \sigma}_{m-\varrho,\ n-\sigma}$ aller dieser Glieder ist durch die Formel

$$(93) \qquad \Sigma v^{\varrho,\ \sigma}_{m-\sigma,\ n-\sigma} = V^{\varrho,\ \sigma}_{m-\varrho,\ n-\sigma}$$

gegeben.

IX. Erweiterte Ableitung.

§ 42. Weitere Ableitungen erster und zweiter Art von P.

In dem § 29 gingen wir von einem Producte

$$P = a^{p_1}_{r_1} a^{p_2}_{r_2} \cdots a^{p_\mu}_{r_\mu} b^{q_1}_{s_1} b^{q_2}_{s_2} \cdots b^{q_\nu}_{s_\nu}$$

der Resultante $R_{m,\ n}$ aus und leiteten daraus durch Multiplication

mit Potenzen von a_m oder b_n Producte höherer Resultanten ab. Jetzt werden wir das Resultat von abwechselnder und beliebig fortgesetzter Multiplication mit Potenzen von solchen a und b betrachten, welche die höchsten Indices immer haben. Nach dem § 31 bleibt das Vorzeichen von P ungeändert. Durch die Ableitungs-Weise ist es weiter klar, dass alle diese Ableitungen von P durch Multiplication aus P, multiplicirt mit einem vollständig reduciblen Gliede der Form (92) (§ 41) bestehen. Wenn wir nämlich die Ableitung mit $A_{M,N}$, P mit $P_{m,n}$ bezeichnen, so erhalten wir ein Product der Resultante $R_{M,N}$,

$$A_{M,N} = P_{m,n}\, v_{M-m,\, N-n}^{\;\;m \qquad n} \tag{94}$$

Nach § 41 lässt sich $v_{M-m,\, N-n}^{\;\;m \qquad n}$ auf a_m oder b_n (resp. auf 1) reduciren. Hieraus folgt, dass die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche in dieser Weise aus dem Producte $P_{\mu,\nu}$ einer niederen Resultante $R_{\mu,\nu}$ abgeleitet werden können, durch die Formel

$$\Sigma A_{m,n} = P_{\mu,\nu}\, \Sigma v_{m-\mu,\, n-\nu}^{\;\;\mu \qquad \nu} = P_{\mu,\nu}\, V_{m-\mu,\, n-\nu}^{\;\;\mu \qquad \nu} \tag{95}$$

gegeben ist. Wenn $P_{\mu,\nu}$ eine Normal-Form ist, so enthält $A_{m,n}$ den Factor $a_0 b_0$.

§ 43. Weitere Ableitungen dritter und vierter Art von P.

In ähnlicher Weise, wie wir in dem vorigen Paragraphen verfahren haben, können wir zu Ableitungen $A_{m,n}$ von $P_{\mu,\nu}$ dadurch gelangen, dafs wir abwechselnd mit Potenzen von a_0 und b_0 multipliciren, und gleichzeitig die Indices der b resp. a um $m-\mu$ resp. $n-\nu$ vermehren. So erhalten wir

$$A_{m,n} = v_{m-\mu,\, n-\nu}\, P_{\;\mu \;\;,\;\; \nu}^{m-\mu,\, n-\nu} \tag{96}$$

(vgl. § 33).

Zugleich ist die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche in dieser Weise aus $P_{\mu,\nu}$ einer niederen Resultante $R_{\mu,\nu}$ abgeleitet werden können, durch die Formel

$$\Sigma A_{m,n} = \Sigma v_{m-\mu,\, n-\nu} \cdot P_{\;\mu \;\;,\;\; \nu}^{m-\mu\;\, n-\nu} = V_{m-\mu,\, n-\nu}\, P_{\;\mu \;\;,\;\; \nu}^{m-\mu\;\, n-\nu} \tag{97}$$

gegeben. Wenn $P_{\mu,\nu}$ eine Normal-Form ist, so enthält $A_{m,n}$ den Factor $a_m b_n$.

§ 44. Zusammengesetzte Ableitungen.

Bis hierher haben wir Ableitungen der ersten und zweiten oder der dritten und vierten Art zusammengesetzt. Jetzt werden wir

irgend eine Combination aller vier Ableitungen untersuchen. Wir beziehen uns hierbei auf die in dem § 24 aufgestellten Sätze über zusammengesetzte Reductionen. Sie behalten ihre Geltung, wenn wir Reduction, Division, Verminderung der Indices durch Ableitung, Multiplication, Vermehrung ersetzen. Die Reihenfolge, in welcher man Ableitungen vornimmt, beeinflusst nicht das Resultat. Wir setzen diese Reihenfolge der Art fest, dass wir zuerst mit Potenzen von a_0 und b_0 abwechselnd, und dann mit Potenzen von solchen a und b, welche die höchsten Indices besitzen, multipliciren, d. h. wir führen zuerst die dritte und vierte Ableitung und sodann die erste und zweite Ableitung aus.

§ 45. Zusammengesetzte Ableitungen von Producten $P_{\mu,\nu}$ einer Resultante $R_{\mu,\nu}$.

Im § 44 multiplicirten wir $P_{\mu,\nu}$ abwechselnd mit Potenzen von a_0, b_0. Der so erhaltene Factor ist nach seiner Bildungsweise und nach dem § 23 vollständig reducibel. Wir bezeichnen ihn mit $v_{\varrho,\sigma}$. Zugleich sind hierbei die Indices der a resp. b von $P_{\mu,\nu}$ um ϱ resp. σ vermehrt worden (vgl. § 30). Also ist die Ableitung $v_{\varrho,\sigma} P_{\mu,\nu}^{\varrho,\sigma}$. Multipliciren wir sie abwechselnd mit Potenzen von Coefficienten a und b, welche die höchsten Indices besitzen, so gelangen wir nach und nach (vgl. § 42) zu der Ableitung

$$(98)\qquad A_{m,n} = v_{\varrho,\sigma} P_{\mu,\nu}^{\varrho,\sigma} v_{m-\mu-\varrho,\, n-\nu-\sigma}^{\mu+\varrho,\, \nu+\sigma}.$$

Die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche durch zusammengesetzte Ableitungen aus $P_{\mu,\nu}$ einer niederen Resultante $R_{\mu,\nu}$ entstehen, ist durch die Formel

$$(99)\quad \Sigma A_{m,n} = P_{\mu,\nu}^{\varrho,\sigma} \Sigma v_{\varrho,\sigma} \Sigma v_{m-\mu-\varrho,\, n-\nu-\sigma}^{\mu+\varrho,\, \nu+\sigma} = P_{\mu,\nu}^{\varrho,\sigma} V_{\varrho,\sigma} V_{m-\mu-\varrho,\, n-\nu-\sigma}^{\mu+\varrho,\, \nu+\sigma}$$

gegeben. Wenn die Werthe ϱ, σ, $m-\mu-\varrho$, $n-\nu-\sigma > 0$ sind, dann enthält $A_{m,n}$ je einen der Factoren a_0, b_0, und je einen der Factoren a_m, b_n.

§ 46. Sämmtliche Ableitungen von allen Resultanten $R_{\mu,\nu}$, welche den Factor $a_0 b_0$ enthalten.

Nach dem § 42 ist $c N_{\mu,\nu} V_{m-\mu,\, n-\nu}^{\mu,\, \nu}$ die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche den Factor $a_0 b_0$ enthalten, und aus der Normal-Form $N_{\mu,\nu}$, der Resultante $R_{\mu,\nu}$ abgeleitet sind, wo c der zusammengesetzte Coefficient von $N_{\mu,\nu}$ ist. Sind N_1, N_2, $\cdots N_r$

die Normal-Formen der Resultante $R_{\mu,\nu}$, $c_1, c_2, \cdots c_r$ ihre Coefficienten, und $W_{\mu,\nu} = c_1 N_1 + c_2 N_2 + \cdots + c_r N_r$ ihre Summe, so ist $(c_1 N_1 + c_2 N_2 + \cdots + c_r N_r)\, V^{\mu,\,\nu}_{m-\mu,\,n-\nu} = W_{\mu,\nu} V^{\mu,\,\nu}_{m-\mu,\,n-\nu}$ die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche den Factor $a_0 b_0$ enthalten und aus den Normal-Formen der Resultante $R_{\mu,\nu}$ abgeleitet sind. Also ist die Summe aller solchen Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche aus allen Normal-Formen aller Resultanten $R_{\mu,\nu}$ niederer Ordnung abgeleitet werden können, durch die Formel

$$\Sigma\, W_{\mu,\nu} V^{\mu,\,\nu}_{m-\mu,\,n-\nu} \tag{100}$$

gegeben. Die Producte in (100) enthalten nur einen der Factoren a_m, b_n.

§ 47. Sämmtliche Ableitungen von allen Resultanten $R_{\mu,\nu}$ mit dem Factor $a_m b_n$.

In ähnlicher Weise finden wir als Ausdruck für die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$ mit dem Factor $a_m b_n$, welche aus allen Normal-Formen aller Resultanten $R_{\mu,\nu}$ niederer Ordnung abgeleitet werden können, die Formel

$$\Sigma\, W^{m-\mu,\,n-\nu}_{\mu,\,\nu} V_{m-\mu,\,n-\nu}. \tag{101}$$

Dies folgt aus dem § 43. Danach ist $c N^{m-\mu,\,n-\nu}_{\mu,\,\nu} V_{m-\mu,\,n-\nu}$ die Summe aller Producte der Resultante $R_{m,n}$, welche Ableitungen aus einer einzigen Normal-Form $N_{\mu,\nu}$ der Resultante $R_{\mu,\nu}$ sind. Ferner ist $W^{m-\mu,\,n-\nu}_{\mu,\,\nu} V_{m-\mu,\,n-\nu}$ die Summe der Producte von $R_{m,n}$, welche Ableitungen aller Normal-Formen von $R_{\mu,\nu}$ sind. Die Producte in (101) enthalten nur einen der Factoren a_0, b_0. (101) ist reziprok zu (100).

§ 48. Sämmtliche Ableitungen aller Resultanten $R_{\mu,\nu}$ mit je einem der Factoren a_0, b_0 und je einem der Factoren a_m, b_n.

Hier legen wir den § 45 zu Grunde. Wenn $R_{\mu,\nu}$ von niederer Ordnung als $R_{m,n}$ ist*), so ist $c N^{\varrho,\,\sigma}_{\mu,\,\nu} V_{\varrho,\sigma} V^{m+\varrho,\,\nu+\sigma}_{m-\mu-\varrho,\,n-\nu-\sigma}$ die Summe aller Producte von $R_{m,n}$, welche Ableitungen aus der Normal-Form $N_{\mu,\nu}$ von $R_{\mu,\nu}$ sind; $W^{\varrho,\,\sigma}_{\mu,\,\nu} V_{\varrho,\sigma} V^{\mu+\varrho,\,\nu+\sigma}_{m-\mu-\varrho,\,n-\nu-\sigma}$ ist die Summe aller Producte von $R_{m,n}$, welche Ableitungen aus allen Normal-Formen von $R_{\mu,\nu}$ sind, und endlich ist

---

*) Hierbei ist $\mu \geqq 2$, $\nu \geqq 2$.

(102) $$\Sigma W^{\varrho\,,\,\sigma}_{\mu,\,\nu} V_{\varrho,\,\sigma} V_{m-\mu-\varrho,\;n-\nu-\sigma}^{\;\;\mu+\varrho\;\;\;\;\;\nu+\sigma}$$

die Summe aller Producte von $R_{m,n}$, welche Ableitungen aus allen Normal-Formen von allen Resultanten $R_{\mu,\nu}$ niederer Ordnung sind. Die Producte in (102) stimmen in so weit mit vollständig reduciblen Gliedern überein, dafs sie je einen der Factoren a_0, b_0 und je einen der Factoren a_m, b_n enthalten.

X. Entwickelungs-Formel für $R_{m,n}$.

§ 49. Die Summe der Glieder der Resultante $R_{m,n}$.

Jetzt sind wir im Stande, eine Formel für die Summe der Glieder von $R_{m,n}$ zu geben. Diese Glieder zerfallen in fünf (sich ausschliessende) Classen:

1. Die vollständig reduciblen Glieder, deren Summe $V_{m,n}$ ist.

2. Die Normal-Formen. Ihre Summe ist $W_{m,n}$.

3. Glieder, die nicht vollständig reducibel sind, aber je einen der Factoren a_0, b_0 und je einen der Factoren a_m, b_n enthalten. Nach § 48 ist ihre Summe $\Sigma W^{\varrho\,,\,\sigma}_{\mu,\,\nu} V_{\varrho,\,\sigma} V_{m-\mu-\varrho,\;n-\nu-\sigma}^{\;\;\mu+\varrho\;\;\;\;\;\nu+\sigma}$.

4. Glieder, die den Factor a_0, b_0, aber nur einen der Factoren a_m, b_n enthalten. Nach dem § 46 ist ihre Summe $\Sigma W_{\mu,\nu} V_{m-\mu,\;n-\nu}^{\;\;\mu\;\;\;\;\;\nu}$.

5. Glieder, die den Factor $a_m b_n$, aber nur einen der Factoren a_0, b_0 enthalten. Nach dem § 47 ist ihre Summe $\Sigma W^{m-\mu\;\;n-\nu}_{\;\;\;\mu\;\;,\;\;\;\nu} V_{m-\mu,\;n-\nu}$.

Durch Addition aller fünf Classen gelangen wir zu der Formel

(103) $$\begin{cases} R_{m,n} = V_{m,n} + W_{m,n} + \Sigma W^{\varrho\,,\,\sigma}_{\mu,\,\nu} V_{\varrho,\,\sigma} V_{m-\mu-\varrho,\;n-\nu-\sigma}^{\;\;\mu+\varrho\;\;\;\;\;\nu+\sigma} \\ \qquad + \Sigma W_{\mu,\nu} V_{m-\mu,\;n-\nu}^{\;\;\mu\;\;\;\;\;\nu} + \Sigma W^{m-\mu\;\;n-\nu}_{\;\;\;\mu\;\;,\;\;\;\nu} V_{m-\mu,\;n-\nu}. \end{cases}$$

§ 50. Zusammenziehung der Formel für $R_{m,n}$.

Wenn wir die Einschränkungen in der Ableitung der Formel (103) weglassen und annehmen, dass $V^{\mu\;\;\nu}_{0,\,0} = W^{\mu\;\;\nu}_{0,\,0} = 1$ ist, so können wir sie so schreiben:

(104) $$R_{m,n} = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\, V_{m-\mu,\;n-\nu}^{\;\;\mu\;\;\;\;\;\nu} V_{\varrho,\,\sigma} W_{\mu-\varrho,\;\nu-\sigma}^{\;\;\varrho\;\;\;\;\;\sigma}.$$

Sie enthält alle in dem § 49 fünf erwähnten Classen.

1. Für $\begin{matrix}\varrho = \mu = 0 \\ \sigma = \nu = 0\end{matrix}$ erhält man das $V_{m,n}$ der Classe 1.

2. Für $\begin{matrix}\varrho = 0,\; \mu = m \\ \sigma = 0,\; \nu = n\end{matrix}$ erhält man das $W_{m,n}$ der Classe 2.

3. Für $\begin{matrix}\mu - \varrho = \mu' \\ \nu - \sigma = \nu'\end{matrix}$ erhält man das $\Sigma W^{\varrho,\,\sigma}_{\mu',\,\nu'} V_{\varrho,\sigma} V^{\mu'+\varrho,\; \nu'+\sigma}_{m-\mu'-\varrho,\; n-\nu'-\sigma}$ der Classe 3.

4. Für $\begin{matrix}\varrho = 0 \\ \sigma = 0\end{matrix}$ erhält man das $\Sigma W_{\mu,\nu} V^{\mu,\;\nu}_{m-\mu,\; n-\nu}$ der Classe 4.

5. Für $\begin{matrix}\varrho = m - \mu',\ \mu = m \\ \sigma = n - \nu',\ \nu = n\end{matrix}$ erhält man das $\Sigma W^{m-\mu',\; n-\nu'}_{\mu',\;\nu'} V_{m-\mu',\, n-\nu'}$ der Classe 5.

Fügen wir die Summations-Grenzen hinzu, so lautet die Formel (104)

$$(105)\quad \begin{cases} R_{m,n} = \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=0} \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=0} \sum\limits_{\sigma=\nu}^{\sigma=\nu} \sum\limits_{\varrho=\mu}^{\varrho=\mu} f(\mu,\nu,\varrho,\sigma) \\ \qquad + \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=n} \sum\limits_{\mu=2}^{\mu=m} \sum\limits_{\sigma=0}^{\sigma=\nu-2} \sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=\mu-2} f(\mu,\nu,\varrho,\sigma), \end{cases}$$

wo $f(\mu, \nu, \varrho, \sigma)$ das Product $V^{\mu,\;\nu}_{m-\mu,\; n-\nu} V_{\varrho,\sigma} W^{\varrho,\;\sigma}_{\mu-\varrho,\; n-\sigma}$ bedeutet.

Diese Formel ist eine Entwickelungs-Formel zur Berechnung von $R_{m,n}$. Um sie zu gebrauchen, rechnet man die sämmtlichen Normal-Formen aller Resultanten bis zu der Resultante $R_{m,n}$ mit ihren Coefficienten aus.

§ 51. Bildung von Normal-Formen.

Um zu den Normal-Formen zu gelangen, bilden wir

$$A = a_0 a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_{n-1}} a_m$$

und lassen die Indices ganze beliebige Werthe zwischen 0 und m durchlaufen, bei denen mindestens eine 0 und eine m vorkommt. Die Indices der b in B berechnen wir aus der Diophantischen Gleichung

$$(106)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = g_2 = mn - g_1,$$

von der wir nur solche Lösungen benützen, bei denen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_m = n$ ist. Jedem A entspricht ein reziprokes A', dessen Gewicht $g_1' = mn - g_1$ ist. Rechnen wir also alle Lösungen, bei denen $g_1 \overline{\overline{<}} \frac{mn}{2}$, und bilden die entsprechenden Normal-Formen, so kann man die übrigen als reziproke aufstellen. Die so entstehenden Producte liefern nicht immer Glieder der Resultante $R_{m,n}$; um solche zu erhalten, müssen wir eine besondere Auswahl treffen (vgl. §§ 4, 15); um zu ihr zu gelangen, werden wir in den späteren Paragraphen die Eigenschaft der Resultante $R_{m,n}$ benützen, sich nicht zu ändern, wenn man f durch $f + \lambda\varphi$ ersetzt $(m \geq n)$.

XI. Relationen zwischen den Coefficienten in $R_{m,n}$.

§ 52. Die Anwendung des Aronhold'schen Processes auf die Resultante.

Wenn die Formeln

(107) $$p_0 + p_1 + \cdots + p_m = n,$$

(108) $$q_0 + q_1 + \cdots + q_n = m,$$

(109) $$p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m + q_1 + 2q_2 + \cdots + nq_n = mn$$

bestehen, dann kann man das Product P des § 14 so schreiben:

(110) $$P = a_0^{p_0} a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m} b_0^{q_0} b_1^{q_1} b_2^{q_2} \cdots b_n^{q_n}.$$

Hierbei ist die Bedeutung der p und q ein wenig geändert. Zugleich ist $R_{m,n}$ ein Aggregat von Producten P,

(111) $$R_{m,n} = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_r P_r,$$

wo

(112) $$c = 0^{p_0} 1^{p_1} 2^{p_2} \cdots m^{p_m} \,|\, 0^{q_0} 1^{q_1} 2^{q_2} \cdots n^{q_n}.$$

ist. Wendet man den Aronhold'schen Process

$$\delta = b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} - b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots (-1)^n b_n \frac{\partial}{\partial a_n}$$

auf $R_{m,n}$ an, so erhalten wir

(113) $$\delta R = c_1 \delta P_1 + c_2 \delta P_2 + \cdots + c_r \delta P_r,$$

wo

(114) $$\begin{cases} \delta P = \sum\limits_{r=0}^{r=n} (-1)^r p_r a_r^{-1} b_r P \\ \quad = \sum\limits_{r=0}^{r=n} (-1)^r p_r a_r^{-1} a_0^{p_0} a_1^{p_1} \cdots a_m^{p_m} b_r b_0^{q_0} b_1^{q_1} \cdots b_n^{q_n} \end{cases}$$

ist. δR ist ein Aggregat von Gliedern $Q_1, Q_2, \cdots Q_\varkappa$, Producten der a der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und der b der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung; die d sind die zusammengesetzten Coefficienten der Q:

(115) $$\delta R \equiv d_1 Q_1 + d_2 Q_2 + \cdots + d_\varkappa Q_\varkappa;$$

da δR identisch verschwindet (Combinante), so bestehen diese Relationen:

(116) $$d_1 = 0, \; d_2 = 0, \cdots d_\varkappa = 0.$$

§ 53. Die Producte Q_ϱ und P_σ. Formel für d_ϱ.

Nach § 52 hat Q_ϱ die Form

(117) $$Q_\varrho = a_0^{r_0}\, a_1^{r_1} \cdots a_m^{r_m}\, b_0^{s_0}\, b_1^{s_1} \cdots b_n^{s_n},$$

vom Gewicht mn, wo die Summe der r, $n-1$, die der s, $m+1$ ist. Es ist aus Producten

$$P = a_0^{p_0}\, a_1^{p_1}\, a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m}\, b_0^{q_0}\, b_1^{q_1}\, b_2^{q_2} \cdots b_n^{q_n}$$

durch Deltairen entstanden. Da dieser Process die Anzahl der a um 1 vermindert, und die der b um 1 vermehrt, so ging Q_ϱ aus Producten P_σ der Form

(118) $$P_\sigma = a_0^{r_0}\, a_1^{r_1} \cdots a_\sigma^{r_\sigma+1} \cdots a_m^{r_m}\, b_0^{s_0}\, b_1^{s_1} \cdots b_\sigma^{s_\sigma-1} \cdots b_n^{s_n},$$

wo $s_\sigma > 0$, hervor.

Deltairen wir P_σ, so erhalten wir als einen Beitrag zu d_ϱ

(119) $$(r_\sigma + 1) \times 0^{r_0}\, 1^{r_1} \cdots \sigma^{r_\sigma+1} \cdots m^{r_m} \,\big|\, 0^{s_0}\, 1^{s_1} \cdots \sigma^{s_\sigma-1} \cdots n^{s_n}.$$

Die Summe aller dieser Beiträge verschwindet; sie ist

(120) $$d_\varrho = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa (r_\varkappa + 1) \times \varkappa\, 0^{r_0}\, 1^{r_1} \cdots m^{r_m} \,\big|\, \varkappa^{-1}\, 0^{s_0}\, 1^{s_1} \cdots n^{s_n} = 0.$$

Hierbei kommen nur Coefficienten, bei denen $s_\sigma > 0$ ist, vor.

§ 54. Uebersetzung der Formeln für Q_ϱ, P_σ und d_ϱ in die frühere Bezeichnungs-Weise.

Nehmen wir Q_ϱ in der Form an

(121) $$Q_\varrho = a_{\varrho_1}^{\pi_1}\, a_{\varrho_2}^{\pi_2} \cdots a_{\varrho_\mu}^{\pi_\mu}\, b_{\sigma_1}^{\varkappa_1}\, b_{\sigma_2}^{\varkappa_2} \cdots b_{\sigma_\nu}^{\varkappa_\nu},$$

wo

(122) $$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_\mu = n - 1,$$

(123) $$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\nu = m + 1,$$

(124) $$P_{\sigma_\lambda} = a_{\sigma_\lambda}\, a_{\varrho_1}^{\pi_1}\, a_{\varrho_2}^{\pi_2} \cdots a_{\varrho_\mu}^{\pi_\mu}\, b_{\sigma_1}^{\varkappa_1}\, b_{\sigma_2}^{\varkappa_2} \cdots b_{\sigma_\lambda}^{\varkappa_\lambda - 1} \cdots b_{\sigma_\nu}^{\varkappa_\nu}$$

ist, so wird die Formel (120)

(125) $$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} (-1)^{\sigma_\lambda} (c_\lambda + 1) \times \sigma_\lambda\, \varrho_1^{\pi_1}\, \varrho_2^{\pi_2} \cdots \varrho_\mu^{\pi_\mu} \,\big|\, \sigma_1^{\varkappa_1} \sigma_2^{\varkappa_2} \cdots \sigma_\lambda^{\varkappa_\lambda - 1} \cdots \sigma_\nu^{\varkappa_\nu} = 0,$$

wo c_λ der Exponent von σ_λ in dem Ausdruck $\varrho_1^{\pi_1}\, \varrho_2^{\pi_2} \cdots \varrho_\mu^{\pi_\mu}$, und der Coefficient, bei dem $\varkappa_\lambda = 0$ ist, verschwindet.

XII. Reductions-Formel für die Coefficienten der Normal-Formen.

§ 55. Relationen für die Indices des Productes Q.

Nach der Formel (41) (§ 16) können wir das Normal-Product P in der früheren Bezeichnungs-Weise

$$P = a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$$

schreiben.

Durch Deltairen erhalten wir ein Aggregat von Producten; das erste Product

$$(126) \qquad p_1 a_0^{p_1-1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1+1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$$

hat den Coefficienten

$$(127) \qquad p_1 \times 0^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \big| 0^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu}.$$

Wenn wir das Product

$$(128) \qquad Q = a_{\varrho_1}^{\pi_1} a_{\varrho_2}^{\pi_2} \cdots a_{\varrho_\mu}^{\pi_\mu} b_{\sigma_1}^{\varkappa_1} b_{\sigma_2}^{\varkappa_2} \cdots b_{\sigma_\nu}^{\varkappa_\nu}$$

in der Form $a_0^{p_1-1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1+1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$ schreiben, so ist

$$(129) \qquad \varrho_1 = 0, \ \varrho_2 = r_2, \cdots \varrho_\mu = m,$$

$$(130) \qquad \sigma_1 = 0, \ \sigma_2 = s_2, \cdots s_\nu = n,$$

$$(131) \qquad \pi_1 = p_1 - 1, \ \pi_2 = p_2, \cdots \pi_\mu = p_\mu,$$

$$(132) \qquad \varkappa_1 = q_1 + 1, \ \varkappa_2 = q_2, \cdots \varkappa_\nu = q_\nu.$$

§ 56. Die Formel (125).

Nach den Formeln (126) ... (132) wird die Formel (125)

$$(133) \quad \begin{cases} p_1 \times 0^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \big| 0^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu} \\ = \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\nu} (-1)^{s_\lambda+1} (c_\lambda + 1) \times s_\lambda 0^{p_1-1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \big| s_\lambda^{-1} 0^{q_1+1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu}, \end{cases}$$

wo c_λ der Exponent von s_λ in dem Ausdruck $0^{p_1-1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu}$ ist.

Dies ist eine Recursions-Formel; sie dient zur Berechnung des Coefficienten der Normal-Form $a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$ aus früher berechneten Coefficienten einfacherer Formen. In ihr ist jeder Coefficient auf der rechten Seite auf eine einfachste Form nach dem § 27 zu reduciren.

XIII. Anwendung der Waring'schen Formel.

§ 57. Die Resultante $R_{m,n}$ durch symmetrische Functionen ausgedrückt.

Die Resultante $R_{m,n}$ hat den Werth

$$(134)\quad \begin{cases} R_{m,n} = (-1)^{mn} b_0^m (a_0\beta_1^m - a_1\beta_1^{m-1} + \cdots (-1)^m a_m) \\ \qquad\qquad (a_0\beta_2^m - a_1\beta_2^{m-1} + \cdots (-1)^m a_m) \\ \qquad\qquad \cdots (a_0\beta_n^m - a_1\beta_n^{m-1} + \cdots (-1)^m a_m), \end{cases}$$

wo die β die Wurzeln von φ sind. In ihr ist

$$(135)\qquad (-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n} b_0^m \Sigma \beta_1^{\varkappa_1} \beta_2^{\varkappa_2} \cdots \beta_n^{\varkappa_n}$$

der Coefficient von $a_{m-\varkappa_1} a_{m-\varkappa_2} \cdots a_{m-\varkappa_n}$. In dem letzteren Ausdruck bezeichnen wir den Coefficienten des Productes

$$b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \cdots b_n^{\lambda_n} \text{ mit } \begin{pmatrix} 0^{\lambda_0} & 1^{\lambda_1} & 2^{\lambda_2} & \cdots & n^{\lambda_n} \\ 0^m & \varkappa_1 & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_n \end{pmatrix}.$$

Er stimmt mit dem Coefficienten

$$m-\varkappa_1\ m-\varkappa_2 \cdots m-\varkappa_n \,|\, 0^{\lambda_0}\, 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$$

des Productes $a_{m-\varkappa_1} a_{m-\varkappa_2} \cdots a_{m-\varkappa_n} b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} \cdots b_n^{\lambda_n}$ in $R_{m,n}$ bis zum Vorzeichen überein:

$$(136)\quad \begin{cases} m-\varkappa_1\ m-\varkappa_2 \cdots m-\varkappa_n \,|\, 0^{\lambda_0}\, 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \\ = (-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n} \begin{pmatrix} 0^{\lambda_0} & 1^{\lambda_1} & 2^{\lambda_2} & \cdots & n^{\lambda_n} \\ 0^m & \varkappa_1 & \varkappa_2 & \cdots & \varkappa_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

§ 58. Der specielle Coefficient $m-g\ m^{n-1} \,|\, 0^{\lambda_0}\, 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$.

Wir wollen den besonderen Fall untersuchen, wo in dem Coefficienten $m-\varkappa_1\ m-\varkappa_2 \cdots m-\varkappa_n \,|\, 0^{\lambda_0}\, 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$, $\varkappa_1 = g$ $\varkappa_2 = \varkappa_3 = \cdots = \varkappa_n = 0$ ist. In ihm wird

$$(137)\quad \begin{cases} \Sigma \beta_1^{\varkappa_1} \beta_2^{\varkappa_2} \cdots \beta_n^{\varkappa_n} = \Sigma \beta_1^g, \\ m-\varkappa_1\ m-\varkappa_2 \cdots m-\varkappa_n \,|\, 0^{\lambda_0}\, 1^{\lambda_1} \cdots n^{\lambda_n} = m-g\ m^{n-1} \,|\, 0^{\lambda_0}\, 1^{\lambda_1} \cdots n^{\lambda_n} \\ = (-1)^g \begin{pmatrix} 0^{\lambda_0} & 1^{\lambda_1} & \cdots & n^{\lambda_n} \\ 0^m & g \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nun lautet die Waring'sche Formel

$$(138)\quad a_0^g s_g = (-1)^g g \sum (-1)^{\varkappa_0} \frac{(g-\varkappa_0-1)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots\varkappa_n!} a_0^{\varkappa_0} a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \cdots a_n^{\varkappa_n},$$

wo s_g die Potenzsumme $\Sigma \alpha_1^g$ der Wurzeln der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

bedeutet. Aus ihr erhalten wir die Formeln

$$(139)\qquad \begin{pmatrix} 0^{\lambda_0} 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \\ 0^m g \end{pmatrix} = (-1)^{\lambda_0 - m} g \frac{(m-\lambda_0-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!},$$

$$(140)\quad m - g m^{n-1} \,|\, 0^{\lambda_0} 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} = (-1)^{\lambda_0 - m + g} g \frac{(m-\lambda_0-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!},$$

und für $g = m$

$$(141)\left\{\begin{aligned} 0 m^{n-1} | 0^{\lambda_0} 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} &= (-1)^{\lambda_0} \frac{m(m-\lambda_0-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!} \\ &= (-1)^{m+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \frac{m(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!}. \end{aligned}\right.$$

§ 59. **Die Coefficienten der Normal-Formen von $R_{m,2}$.**

Wenn wir in der Formel (141) $n = 2$ setzen, so erhalten wir

$$(142)\qquad 0 m \,|\, 0^{\lambda_0} 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} = (-1)^{\lambda_0} \frac{m(\lambda_1+\lambda_2-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!}.$$

Hierdurch sind wir im Stande, mittels der Formeln (105), (142) eine End-Formel zur Berechnung der Coefficienten der Normal-Formen der Resultante $R_{m,2}$ abzuleiten.

§ 60. **Die Resultante $R_{m,2}$.**

Ist $n = 2$, so wird die Formel (105)

$$(143)\qquad R_{m,2} = V_{m,2} + \sum_{\mu=2}^{\mu=m} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\mu-2} V_{m-\mu,0}^{\mu\;\;2} V_{\varrho,0} W_{\mu-\varrho,2}^{\varrho}.$$

Nach § 38 und § 40 ist

$$V_{m,2} = \sum v_{m,2} = \sum^{\varkappa} a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} b_0^{\varkappa_1} b_1^{\varkappa_2-\varkappa_1} b_2^{m-\varkappa_2};$$

$$V_{m,0} = b_0^m; \qquad \text{also } V_{m,0}^{\varrho\;\sigma} = b_\sigma^m.$$

Nach der Formel (142) ist

$$W_{\mu-\varrho,2}^{\varrho} = \sum 0\ \mu - \varrho \,|\, 0^{\lambda_0} 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \times a_\varrho a_\mu b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}$$
$$= \sum (-1)^{\lambda_2} (\mu - \varrho) \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)!}{\lambda_1!\, \lambda_2!} a_\varrho a_\mu b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}.$$

Tragen wir diese Werthe in (143) ein, so erhalten wir

$$(144)\quad \begin{cases} R_{m,2} = \sum^{\varkappa} a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} b_0^{\varkappa_1} b_1^{\varkappa_2-\varkappa_1} b_2^{m-\varkappa_2} \\ \quad + \sum\limits_{\mu=2}^{\mu=m} \sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=\mu-2} b_0^{\varrho} b_2^{m-\mu} \sum^{\lambda} (-1)^{\lambda_2} (\mu-\varrho) \frac{(\lambda_1+\lambda_2-1)!}{\lambda_1!\, \lambda_2!} a_\varrho a_\mu b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}, \end{cases}$$

wo

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = \mu - \varrho,\ \lambda_2 \neq 0,$$

oder

$$(145)\quad \begin{cases} R_{m,2} = a_0 a_m b_1^m + a_0 a_{m-1} b_1^{m-1} b_2 + a_1 a_{m-2} b_0 b_1^{m-3} b_2^2 + \cdots \\ \quad + a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} b_0^{\varkappa_1} b_1^{\varkappa_2-\varkappa_1} b_2^{m-\varkappa_2} + \cdots + 2 a_1 a_3 b_0^2 b_2^{m-2} + 2 a_0 a_4 b_0^2 b_2^{m-2} + \cdots \\ \quad + (-1)^{\lambda} (\mu - \nu) \frac{(\mu - \nu - \lambda - 1)!}{(\mu - \nu - 2\lambda)!\, \lambda!} a_\mu a_\nu b_0^{\nu+\lambda} b_1^{\mu-\nu-2\lambda} b_2^{m+\lambda-\mu}, \end{cases}$$

wo

$$m \geqq \varkappa_2 \geqq \varkappa_1 \geqq 0,\ \lambda \neq 0,\ \mu - \nu - 2\lambda \geqq 0,\ m \geqq \mu - 2 \geqq \nu \geqq 0$$

ist.

XIV. Berechnung von allgemeinen Resultanten.

§ 61. Berechnung der Formen und ihrer Coefficienten.

In dem § 40 haben wir eine Methode zur Berechnung aller vollständig reduciblen Glieder angegeben, wenn man von niedrigeren zu höheren Resultanten $R_{m,n}$ fortschreitet. Die vollständig reduciblen Glieder haben den Coefficienten 1 (§§ 36, 38). Nach der in dem § 50 gegebenen Methode bilden wir die sämmtlichen Normal-Producte der betreffenden Resultanten. Bei der Berechnung ist es vortheilhaft, die Normal-Formen einer Resultante nach ihrem Gewicht g_1 in Classen einzutheilen. Dieses Gewicht g_1 ist $\geqq m$. Da die Zahlen m und n unter den Indices der Normal-Formen immer vorkommen, so können wir weiter diese Classen $(g_1 - m, mn - g_1 - n)$ charakterisiren. Hierbei ist es auch möglich, dass eine Classe fehlt,

weil die zugehörige Gleichung (106) keine ihr entsprechende Lösung besitzt. Wir bestimmen die Coefficienten der Normal-Formen

$$a_0^{p_1} a_{r_2}^{p_2} \cdots a_m^{p_\mu} b_0^{q_1} b_{s_2}^{q_2} \cdots b_n^{q_\nu}$$

der Resultante $R_{m,n}$ durch die Formel (133)

$$p_1 \times 0^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \,|\, 0^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu}$$

$$= \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\nu} (-1)^{s_\lambda+1}(1+c_\lambda) \times s_\lambda\, 0^{p_1-1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \,|\, s_\lambda^{-1}\, 0^{q_1+1} s^{q_2} \cdots n^{q_\nu},$$

wo für s_ν, n zu setzen, $m > n$, und jeder Coefficient auf seine einfachste Form zu reduciren ist.

§ 62. **Beispiele zur Berechnung der Coefficienten.**

1. Insbesondere liefert die Formel (142)

$$0\, m \,|\, 0^{\lambda_0} 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} = (-1)^{\lambda_2} m \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)!}{\lambda_1!\, \lambda_2!}$$

die Coefficienten der Normal-Formen von Resultanten $R_{m,2}$, z. B.:

$$m = 2,\ n = 2$$

$$02 \,|\, 02 = (-1)^1 2 \frac{0!}{0!\, 1!} = -2.$$

$$m = 3,\ n = 2$$

$$03 \,|\, 012 = (-1)^1 3 \frac{1!}{1!\, 1!} = -3.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir:

$$m = 4,\ n = 2$$

$$04 \,|\, 01^2 2 = -4,$$
$$04 \,|\, 0^2 2^2 = -2.$$

$$m = 5,\ n = 2$$

$$05 \,|\, 0^2 1 2^2 = 5,$$
$$05 \,|\, 01^3 2 = -5.$$

2. Im Allgemeinen fängt man mit $02 \,|\, 02$ an. Nach (133) erhalten wir $02 | 02 = -2 \times 22 | 00 = -2 \times 1 | 0 = -2$. Zunächst berechnet man

$$03 \,|\, 012 = 13 \,|\, 0^2 2 - 23 \,|\, 0^2 1 = 02 \,|\, 02 - 1 \,|\, 0 = -2 - 1 = -3.$$

Für $m = 3$, $n = 3$ gibt es vier Formen:

$$\begin{array}{ll} 0,3 & 0^2 3 \mid 03^2, \\ 1,2 & 013 \mid 023, \\ 2,1 & 023 \mid 013, \\ 3,0 & 03^2 \mid 0^2 3. \end{array}$$

Man sieht, dass sowohl die erste und vierte, als auch die zweite und dritte reziprok sind. Da reziproke Coefficienten einander gleich sind, benützt man diese Eigenschaft als Controlle. Hier haben wir:

$$\begin{aligned} &013 \mid 023 = -213 \mid 0^2 3 + 2 \times 313 \mid 0^2 2 = -012 \mid 03 + 2 \times 02 \mid 02 = 3 - 4 = -1, \\ &023 \mid 013 = \ \ 123 \mid 0^2 3 + 2 \times 323 \mid 0^2 1 = \ \ 012 \mid 03 + 2 \times 0 \mid 1 = -3 + 2 = -1, \\ &03^2 \mid 0^2 3 = 3 \times 3^3 \mid 0^3 = 3 \times 1 \mid 0 = 3, \\ &2 \times 0^2 3 \mid 03^2 = 2 \times 03^2 \mid 0^2 3 = 2 \times 3, \end{aligned}$$

also ist

$$0^2 3 \mid 03^2 = 3.$$

Als Folgerung unserer Bezeichnung, wo f mit wechselndem und φ mit positivem Vorzeichen geschrieben ist, haben wir

$$(146) \quad 0^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu} \Big| 0^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu} = 0^{q_1} s_2^{q_2} \cdots n^{q_\nu} \Big| 0^{p_1} r_2^{p_2} \cdots m^{p_\mu}.$$

In jedem Ausdruck beziehen sich die Indices und Exponenten auf der linken Seite des Striches auf die a, diejenigen rechts auf die b. Für $n > m$ gebrauchen wir die zweite Form.

Für $m = 4$, $n = 3$ giebt es acht Formen. Wir geben nur Resultate:

$$\begin{array}{llll} 0^2 4 \mid 023^2 = & 4, & 024 \mid 0123 = & 4, \\ 014 \mid 013^2 = & 5, & 034 \mid 01^2 3 = & -1, \\ 014 \mid 02^2 3 = & -1, & 034 \mid 0^2 23 = & 5, \\ 024 \mid 0^2 3^2 = & -3, & 04^2 \mid 0^2 13 = & 4. \end{array}$$

$m = 5$, $n = 3$ (16 Formen)

$$\begin{array}{llll} 0^2 5 \mid 013^3 = 05^2 \mid 0^3 23 = & -5, & 015 \mid 02^3 3 = 045 \mid 01^3 3 = & -1, \\ 0^2 5 \mid 02^2 3^2 = 05^2 \mid 0^2 1^2 3 = & 5, & 025 \mid 0^2 23^2 = 035 \mid 0^2 13^2 = & -7, \\ 015 \mid 0^2 3^3 = 045 \mid 0^3 3^2 = & -3, & 025 \mid 012^2 3 = 035 \mid 01^2 23 = & 6, \\ 015 \mid 0123^2 = 045 \mid 0^2 123 = & 7, & 025 \mid 01^2 3^2 = 035 \mid 0^2 2^2 3 = & 3. \end{array}$$

$m = 4,\ n = 4$ (29 Formen)

0, 8 $\quad 0^3 4 \mid 04^3 = -4$.

1, 7 $\quad 0^2 14 \mid 034^2 = 1$.

2, 6 $\quad 0^2 24 \mid 024^2 = 2$,
$0^2 24 \mid 03^2 4 = 2$,
$01^2 4 \mid 024^2 = 2$,
$01^2 4 \mid 03^2 4 = -1$.

3, 5 $\quad 0^2 34 \mid 0234 = -2$,
$0^2 34 \mid 014^2 = -5$,
$0124 \mid 0234 = 8$,
$0124 \mid 014^2 = -2$.

4, 4 $\quad 0^2 4^2 \mid 0134 = -8$,
$0134 \mid 02^2 4 = 0$,
$0^2 4^2 \mid 02^2 4 = -4$,
$0134 \mid 0134 = 10$,
$0^2 4^2 \mid 0^2 4^2 = 6$,
$02^2 4 \mid 02^2 4 = 4$,
$02^2 4 \mid 0^2 4^2 = -4$,
$02^2 4 \mid 0134 = 0$,
$0134 \mid 0^2 4^2 = -8$.

5, 3 $\quad 0234 \mid 0^2 34 = -2$,
$0234 \mid 0124 = 8$,
$014^2 \mid 0^2 34 = -5$,
$014^2 \mid 0124 = -2$.

6, 2 $\quad 03^2 4 \mid 01^2 4 = -1$,
$03^2 4 \mid 0^2 24 = 2$,
$024^2 \mid 01^2 4 = 2$,
$024^2 \mid 0^2 24 = 2$.

7, 1 $\quad 034^2 \mid 0^2 14 = 1$.

8, 0 $\quad 04^3 \mid 0^3 4 = -4$.

$m = 5,\ n = 4$ (73 Formen)

0, 11

$0^3 5 \mid 034^3 = -5$.

1, 10

$0^2 15 \mid 024^3 = -6$,
$0^2 15 \mid 03^2 4^2 = -1$.

2, 9

$01^2 5 \mid 014^3 = -7$,
$01^2 5 \mid 03^3 4 = -1$,
$01^2 5 \mid 0234^2 = 3$,
$0^2 25 \mid 014^3 = 7$,
$0^2 25 \mid 03^3 4 = 2$,
$0^2 25 \mid 0234^2 = -4$.

3, 8

$0125 \mid 02^2 4^2 = -4$,
$0125 \mid 023^2 4 = 11$,
$0125 \mid 0134^2 = -10$,
$0125 \mid 0^2 4^3 = 8$,
$0^2 35 \mid 02^2 4^2 = 8$,
$0^2 35 \mid 023^2 4 = -9$,
$0^2 35 \mid 0134^2 = 1$,
$0^2 35 \mid 0^2 4^3 = -4$.

4, 7

$0135 \mid 013^2 4 = 5$,
$0135 \mid 02^2 34 = 2$,
$0135 \mid 0124^2 = -2$,
$0135 \mid 0^2 34^2 = -6$,
$02^2 5 \mid 013^2 4 = 0$,
$02^2 5 \mid 02^2 34 = 6$,
$02^2 5 \mid 0124^2 = -6$,
$02^2 5 \mid 0^2 34^2 = -1$,
$0^2 45 \mid 013^2 4 = -13$,
$0^2 45 \mid 02^2 34 = -3$,
$0^2 45 \mid 0124^2 = 2$,
$0^2 45 \mid 0^2 34^2 = 11$.

5, 6

$0145 \mid 01^24^2 = -8,$
$0145 \mid 01234 = 0,$
$0145 \mid 02^34 = 0,$
$0145 \mid 0^224^2 = 4,$
$0145 \mid 0^23^24 = -8,$
$0235 \mid 01^24^2 = 1,$
$0235 \mid 01234 = 5,$
$0235 \mid 02^34 = 4,$
$0235 \mid 0^224^2 = -12,$
$0235 \mid 0^23^24 = 1,$
$0^25^2 \mid 01^24^2 = 5,$
$0^25^2 \mid 01234 = -5,$
$0^25^2 \mid 02^34 = -5,$
$0^25^2 \mid 0^224^2 = 5,$
$0^25^2 \mid 0^23^24 = 5.$

6, 5

$015^2 \mid 0^214^2 = 11,$
$015^2 \mid 0^2234 = 2,$
$015^2 \mid 012^24 = -3,$
$015^2 \mid 01^234 = -13,$
$03^25 \mid 0^214^2 = -1,$
$03^25 \mid 0^2234 = -6,$
$03^25 \mid 012^24 = 6,$
$03^25 \mid 01^234 = 0,$
$0245 \mid 0^214^2 = -6,$
$0245 \mid 0^2234 = -2,$
$0245 \mid 012^24 = 2,$
$0245 \mid 01^234 = 5.$

7, 4

$025^2 \mid 0^34^2 = -4,$
$025^2 \mid 0^2134 = 1,$
$025^2 \mid 01^224 = -9,$
$025^2 \mid 0^22^24 = 8,$
$0345 \mid 0^34^2 = 8,$
$0345 \mid 0^2134 = -10,$
$0345 \mid 01^224 = 11,$
$0345 \mid 0^22^24 = -4.$

8, 3

$035^2 \mid 0^2124 = -4,$
$035^2 \mid 01^34 = 2,$
$035^2 \mid 0^334 = 7,$
$04^25 \mid 0^2124 = 3,$
$04^25 \mid 01^34 = -1,$
$04^25 \mid 0^334 = -7.$

9, 2

$045^2 \mid 0^21^24 = 1,$
$045^2 \mid 0^324 = -6.$

10, 1

$05^3 \mid 0^314 = -5.$

§ 63. Die Resultante $R_{5,4}$.

Als letztes Beispiel wählen wir die Resultante $R_{5,4}$. Nach (105) ist

$$(147)\quad R_{5,4} = V_{5,4} + \sum_{\nu=2}^{\nu=4} \sum_{\mu=2}^{\mu=5} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=3} V_{5\overset{\mu}{-}\mu,\, 4\overset{\nu}{-}\nu}\, V_{\varrho,\,\sigma}\, W_{\mu\overset{\varrho}{-}\varrho,\, \nu\overset{\sigma}{-}\sigma}.$$

Wie wir in § 49 festgesetzt haben, lassen sich die Glieder der Resultante $R_{5,4}$ in fünf Classen eintheilen: 1. Vollständig reducible Glieder. 2. Normal-Formen. 3. Glieder, welche den Factor $a_0 b_0$ und nur einen der Factoren a_5, b_4 enthalten. 4. Glieder, welche den Factor $a_5 b_4$ und nur einen der Factoren a_0, b_0 enthalten. 5. Glieder (nicht in 1.), welche je einen der Factoren a_0, b_0 und je einen der Factoren a_5, b_4 enthalten.

§ 64. Die Indices ϱ, σ, μ, ν in den Gliedern der verschiedenen Classen.

Die Classen 2, 3, 4, 5 lassen sich auch durch Relationen der Indices ϱ, σ, μ, ν charakterisiren.

2. Die Formeln $\begin{matrix}\varrho=0\\ \sigma=0\end{matrix}$, $\begin{matrix}\mu=5\\ \nu=4\end{matrix}$ bestehen gleichzeitig.

3. Die Formeln $\begin{matrix}\varrho=0\\ \sigma=0\end{matrix}$ bestehen gleichzeitig; μ und ν dürfen alle Werthe haben, welche die Formeln $\begin{matrix}\mu=5\\ \nu=4\end{matrix}$ nicht gleichzeitig befriedigen.

4. Die Formeln $\begin{matrix}\mu=5\\ \nu=4\end{matrix}$ bestehen gleichzeitig; ϱ und σ dürfen nicht gleichzeitig die Formeln $\begin{matrix}\varrho=0\\ \sigma=0\end{matrix}$ befriedigen.

5. Es dürfen weder gleichzeitig die Formeln $\begin{matrix}\varrho=0\\ \sigma=0\end{matrix}$, noch gleichzeitig die Formeln $\begin{matrix}\mu=5\\ \nu=4\end{matrix}$ bestehen.

§ 65. Schemas der Classen von $R_{5,4}$.

Nach dem vorigen Paragraphen haben wir die folgenden Schemas für die Summen der Glieder der Classen 3, 4, 5.

3. $W_{2,2}V^{2\;2}_{3,\,2} + W_{2,3}V^{2\;3}_{3,\,1} + W_{2,4}V^{2\;4}_{3,\,0} + W_{3;2}V^{3\;2}_{2,\,2} + W_{3,3}V^{3\;3}_{2,\,1}$
$+ W_{3,4}V^{3\;4}_{2,\,0}\; W_{4,2}V^{4\;2}_{1,\,2} + W_{4,3}V^{4\;3}_{1,\,1} + W_{4,4}V^{4\;4}_{1,\,0} + W_{5,2}V^{5\;2}_{0,\,2}$
$+ W_{5,3}V^{5\;3}_{0,\,1}.$

4. $W^{3\;2}_{2,\,2}V_{3,2} + W^{3\;1}_{2,\,3}V_{3,1} + W^{3\;0}_{2,\,4}V_{3,0} + W^{2\;2}_{3,\,2}V_{2,2} + W^{2\;1}_{3,\,3}V_{2,1}$
$+ W^{2\;0}_{3,\,4}V_{2,0} + W^{1\;2}_{4,\,2}V_{1,2} + W^{1\;1}_{4,\,3}V_{1,1} + W^{1\;0}_{4,\,4}V_{1,0} + W^{0\;2}_{5,\,2}V_{0,2}$
$+ W^{0\;1}_{5,\,3}V_{0,1}.$

5. $W^{0\;1}_{2,\,2}V_{0,1}V^{2\;3}_{3,\,1} + W^{0\;1}_{2,\,3}V_{0,1}V^{2\;4}_{3,\,0} + W^{0\;1}_{3,\,2}V_{0,1}V^{3\;3}_{2,\,1} + W^{0\;1}_{3,\,3}V_{0,1}V^{3\;4}_{2,\,0}$
$+ W^{0\;1}_{4,\,2}V_{0,1}V^{4\;3}_{1,\,1} + W^{0\;1}_{4,\,3}V_{0,1}V^{4\;4}_{1,\,0} + W^{0\;1}_{5,\,2}V_{0,1}V^{5\;3}_{0,\,2} + W^{0\;2}_{2,\,2}V_{0,2}V^{2\;4}_{3,\,0}$
$+ W^{0\;2}_{3,\,2}V_{0,2}V^{3\;4}_{2,\,0} + W^{0\;2}_{4,\,2}V_{0,2}V^{4\;4}_{1,\,0} + W^{1\;0}_{2,\,2}V_{1,0}V^{3\;2}_{2,\,2} + W^{1\;0}_{2,\,3}V_{1,0}V^{3\;3}_{2,\,1}$
$+ W^{1\;0}_{2,\,4}V_{1,0}V^{3\;4}_{2,\,0} + W^{1\;0}_{3,\,2}V_{1,0}V^{4\;2}_{1,\,2} + W^{1\;0}_{3,\,3}V_{1,0}V^{4\;3}_{1,\,1} + W^{1\;0}_{3,\,4}V_{1,0}V^{4\;4}_{1,\,0}$
$+ W^{1\;0}_{4,\,2}V_{1,0}V^{5\;2}_{0,\,2} + W^{1\;0}_{4,\,3}V_{1,0}V^{5\;3}_{0,\,1} + W^{1\;1}_{2,\,2}V_{1,1}V^{3\;3}_{2,\,1} + W^{1\;1}_{2,\,3}V_{1,1}V^{3\;4}_{2,\,0}$
$+ W^{1\;1}_{3,\,2}V_{1,1}V^{4\;3}_{1,\,1} + W^{1\;1}_{3,\,3}V_{1,1}V^{4\;4}_{1,\,0} + W^{1\;1}_{4,\,2}V_{1,1}V^{5\;3}_{0,\,1} + W^{1\;2}_{2,\,2}V_{1,2}V^{3\;4}_{2,\,0}.$

$$+ W_{3,2}^{1\,2} V_{1,2} V_{1,0}^{4\,4} + W_{2,2}^{2\,0} V_{2,0} V_{1,2}^{4\,2} + W_{2,3}^{2\,0} V_{2,0} V_{1,1}^{4\,3} + W_{2,4}^{2\,0} V_{2,0} V_{1,0}^{4\,4}$$
$$+ W_{3,2}^{2\,0} V_{2,0} V_{0,2}^{5\,2} + W_{3,3}^{2\,0} V_{2,0} V_{0,1}^{5\,3} + W_{2,2}^{2\,1} V_{2,1} V_{1,1}^{4\,3} + W_{2,3}^{2\,1} V_{2,1} V_{1,0}^{4\,4}$$
$$+ W_{3,2}^{2\,1} V_{2,1} V_{0,1}^{5\,3} + W_{2,2}^{2\,2} V_{2,2} V_{1,0}^{4\,4} + W_{2,2}^{3\,0} V_{3,0} V_{0,2}^{5\,2} + W_{2,3}^{3\,0} V_{3,0} V_{0,1}^{5\,3}$$
$$+ W_{2,2}^{3\,1} V_{3,1} V_{0,1}^{5\,3}.$$

Nach S. 3 sind $W_{m,n}^{\varrho\,\sigma}$, $V_{m,n}^{\varrho\,\sigma}$ für die Formen

$$a_\varrho x^m - a_{\varrho+1} x^{m-1} + \cdots (-1)^m a_{\varrho+m}$$

und

$$b_\sigma x^n + b_{\sigma+1} x^{n-1} + \cdots + b_{\sigma+n}$$

in derselben Weise, wie $W_{m,n}$, $V_{m,n}$ für die Formen

$$a_0 x^m - a_1 x^{m-1} + \cdots (-1)^m a_m$$

und

$$b_0 x^n + \cdots + b_n$$

gebildet. In der Tabelle von $R_{5,4}$ ist die obige Eintheilung in Classen eingehalten worden; die Glieder der Classen 3, 4, 5 befolgen die Ordnung der Schemas der entsprechenden Classen.

§ 66. **Tabelle von $R_{5,4}$.**

(Vollständig reducible Glieder.)

$$R_{5,4} = a_1^2 a_3^2 b_0 b_2^2 b_4^2 + a_0 a_1 a_3^2 b_1 b_2^2 b_4^2 + a_0^2 a_3^2 b_2^3 b_4^2 + a_0 a_2 a_3^2 b_1^2 b_2 b_4^2$$
$$+ a_1 a_2 a_3^2 b_0 b_1 b_2 b_4^2 + a_2^2 a_3^2 b_0^2 b_2 b_4^2 + a_0 a_3^3 b_1^3 b_4^2 + a_1 a_3^3 b_0 b_1^2 b_4^2$$
$$+ a_2 a_3^3 b_0^2 b_1 b_4^2 + a_3^4 b_0^3 b_4^2 + a_0 a_2^2 a_3 b_1^2 b_3 b_4^2 + a_1 a_2^2 a_3 b_0 b_1 b_3 b_4^2$$
$$+ a_2^3 a_3 b_0^2 b_3 b_4^2 + a_1^2 a_2 a_3 b_0 b_2 b_3 b_4^2 + a_0 a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 b_4^2$$
$$+ a_0^2 a_2 a_3 b_2^2 b_3 b_4^2 + a_1^3 a_3 b_0 b_3^2 b_4^2 + a_0 a_1^2 a_3 b_1 b_3^2 b_4^2 + a_0^2 a_1 a_3 b_2 b_3^2 b_4^2$$
$$+ a_0^3 a_3 b_3^3 b_4^2 + a_0 a_2^3 b_1^2 b_4^3 + a_1 a_2^3 b_0 b_1 b_4^3 + a_2^4 b_0^2 b_4^3 + a_1^2 a_2^2 b_0 b_2 b_4^3$$
$$+ a_0 a_1 a_2^2 b_1 b_2 b_4^3 + a_0^2 a_2^2 b_2^2 b_4^3 + a_1^3 a_2 b_0 b_3 b_4^3 + a_0 a_1^2 a_2 b_1 b_3 b_4^3$$
$$+ a_0^2 a_1 a_2 b_2 b_3 b_4^3 + a_0^3 a_2 b_3^2 b_4^3 + a_1^4 b_0 b_4^4 + a_0 a_1^3 b_1 b_4^4 + a_0^2 a_1^2 b_2 b_4^4$$
$$+ a_0^3 a_1 b_3 b_4^4 + a_0^4 b_4^5 + a_0 a_2^2 a_4 b_1^2 b_3^2 b_4 + a_1 a_2^2 a_4 b_0 b_1 b_3^2 b_4$$
$$+ a_2^3 a_4 b_0^2 b_3^2 b_4 + a_1^2 a_2 a_4 b_0 b_2 b_3^2 b_4 + a_0 a_1 a_2 a_4 b_1 b_2 b_3^2 b_4$$
$$+ a_0^2 a_2 a_4 b_2^2 b_3^2 b_4 + a_1^3 a_4 b_0 b_3^3 b_4 + a_0 a_1^2 a_4 b_1 b_3^3 b_4 + a_0^2 a_1 a_4 b_2 b_3^3 b_4$$
$$+ a_0^3 a_4 b_3^4 b_4 + a_1^2 a_3 a_4 b_0 b_2^2 b_3 b_4 + a_0 a_1 a_3 a_4 b_1 b_2^2 b_3 b_4 + a_0^2 a_3 a_4 b_3^2 b_3 b_4$$
$$+ a_0 a_2 a_3 a_4 b_1^2 b_2 b_3 b_4 + a_1 a_2 a_3 a_4 b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 + a_2^2 a_3 a_4 b_0^2 b_2 b_3 b_4$$
$$+ a_0 a_3^2 a_4 b_1^3 b_3 b_4 + a_1 a_3^2 a_4 b_0 b_1^2 b_3 b_4 + a_2 a_3^2 a_4 b_0^2 b_1 b_3 b_4 + a_3^3 a_4 b_0^3 b_3 b_4$$

$$+ a_1^2 a_4^2 b_0 b_2^3 b_4 + a_0 a_1 a_4^2 b_1 b_2^3 b_4 + a_0^2 a_4^2 b_2^4 b_4 + a_0 a_2 a_4^2 b_1^2 b_2^2 b_4$$
$$+ a_1 a_2 a_4^2 b_0 b_1 b_2^2 b_4 + a_2^2 a_4^2 b_0^2 b_2^2 b_4 + a_0 a_3 a_4^2 b_1^3 b_2 b_4 + a_1 a_3 a_4^2 b_0 b_1^2 b_2 b_4$$
$$+ a_2 a_3 a_4^2 b_0^2 b_1 b_2 b_4 + a_3^2 a_4^2 b_0^3 b_2 b_4 + a_0 a_4^3 b_1^4 b_4 + a_1 a_4^3 b_0 b_1^3 b_4$$
$$+ a_2 a_4^3 b_0^2 b_1^2 b_4 + a_3 a_4^3 b_0^3 b_1 b_4 + a_4^4 b_0^4 b_4 + a_0 a_2^2 a_5 b_1^2 b_3^3$$
$$+ a_1 a_2^2 a_5 b_0 b_1 b_3^3 + a_2^3 a_5 b_0^2 b_3^3 + a_1^2 a_2 a_5 b_0 b_2 b_3^3 + a_0 a_1 a_2 a_5 b_1 b_2 b_3^3$$
$$+ a_0^2 a_2 a_5 b_2^2 b_3^3 + a_1^3 a_5 b_0 b_3^4 + a_0 a_1^2 a_5 b_1 b_3^4 + a_0^2 a_1 a_5 b_2 b_3^4 + a_0^3 a_5 b_3^5$$
$$+ a_1^2 a_3 a_5 b_0 b_2^2 b_3^2 + a_0 a_1 a_3 a_5 b_1 b_2^2 b_3^2 + a_0^2 a_3 a_5 b_2^3 b_3^2 + a_0 a_2 a_3 a_5 b_1^2 b_2 b_3^2$$
$$+ a_1 a_2 a_3 a_5 b_0 b_1 b_2 b_3^2 + a_2^2 a_3 a_5 b_0^2 b_2 b_3^2 + a_0 a_3^2 a_5 b_1^3 b_3^2 + a_1 a_3^2 a_5 b_0 b_1^2 b_3^2$$
$$+ a_2 a_3^2 a_5 b_0^2 b_1 b_3^2 + a_3^3 a_5 b_0^3 b_3^2 + a_1^2 a_4 a_5 b_0 b_2^3 b_3 + a_0 a_1 a_4 a_5 b_1 b_2^3 b_3$$
$$+ a_0^2 a_4 a_5 b_2^4 b_3 + a_0 a_2 a_4 a_5 b_1^2 b_2^2 b_3 + a_1 a_2 a_4 a_5 b_0 b_1 b_2^2 b_3$$
$$+ a_2^2 a_4 a_5 b_0^2 b_2^2 b_3 + a_0 a_3 a_4 a_5 b_1^3 b_2 b_3 + a_1 a_3 a_4 a_5 b_0 b_1^2 b_2 b_3$$
$$+ a_2 a_3 a_4 a_5 b_0^2 b_1 b_2 b_3 + a_3^2 a_4 a_5 b_0^3 b_2 b_3 + a_0 a_4^2 a_5 b_1^4 b_3 + a_1 a_4^2 a_5 b_0 b_1^3 b_3$$
$$+ a_2 a_4^2 a_5 b_0^2 b_1^2 b_3 + a_3 a_4^2 a_5 b_0^3 b_1 b_3 + a_4^3 a_5 b_0^4 b_3 + a_1^2 a_5^2 b_0 b_2^4$$
$$+ a_0 a_1 a_5^2 b_1 b_2^4 + a_0^2 a_5^2 b_2^5 + a_0 a_2 a_5^2 b_1^2 b_2^3 + a_1 a_2 a_5^2 b_0 b_1 b_2^3$$
$$+ a_2^2 a_5^2 b_0^2 b_2^3 + a_0 a_3 a_5^2 b_1^3 b_2^2 + a_1 a_3 a_5^2 b_0 b_1^2 b_2^2 + a_2 a_3 a_5^2 b_0^2 b_1 b_2^2$$
$$+ a_3^2 a_5^2 b_0^3 b_2^2 + a_0 a_4 a_5^2 b_1^4 b_2 + a_1 a_4 a_5^2 b_0 b_1^3 b_2 + a_2 a_4 a_5^2 b_0^2 b_1^2 b_2$$
$$+ a_3 a_4 a_5^2 b_0^3 b_1 b_2 + a_4^2 a_5^2 b_0^4 b_2 + a_0 a_5^3 b_1^5 + a_1 a_5^3 b_0 b_1^4 + a_2 a_5^3 b_0^2 b_1^3$$
$$+ a_3 a_5^3 b_0^3 b_1^2 + a_4 a_5^3 b_0^4 b_1 + a_5^4 b_0^5 .$$

(Glieder, die den Factor $a_0 b_0$ und nur einen der Factoren a_5, b_4 enthalten):

$$- 2 a_0 a_2 b_0 b_2 (a_3^2 b_2 b_4^2 + a_2 a_3 b_3 b_4^2 + a_2^2 b_4^3 + a_2 a_4 b_3^2 b_4 + a_3 a_4 b_2 b_3 b_4$$
$$+ a_4^2 b_2^2 b_4 + a_2 a_5 b_3^3 + a_3 a_5 b_2 b_3^2 + a_4 a_5 b_2^2 b_3 + a_5^2 b_2^3)$$
$$- 3 a_0 a_1 a_2 b_0 b_3 (a_2 b_4^3 + a_3 b_3 b_4^2 + a_4 b_3^2 b_4 + a_5 b_3^3) + (2 a_0^2 a_2^2 b_0 b_4$$
$$- 4 a_0 a_1^2 a_2 b_0 b_4) b_4^3 - 3 a_0 a_3 b_0 b_1 b_2 (a_4^2 b_2 b_4 + a_3 a_4 b_3 b_4 + a_3^2 b_4^2$$
$$+ a_3 a_5 b_3^2 + a_4 a_5 b_2 b_3 + a_5^2 b_2^2) + (- a_0 a_1 a_3 b_0 b_2 b_3 - a_0 a_2 a_3 b_0 b_1 b_3$$
$$+ 3 a_0 a_3^2 b_0^2 b_3 + 3 a_0^2 a_3 b_0 b_3^2)(a_3 b_4^2 + a_4 b_3 b_4 + a_5 b_3^2) + (4 a_0 a_2 a_3^2 b_0^2 b_4$$
$$+ 5 a_0 a_1 a_3^2 b_0 b_1 b_4 - a_0 a_2^2 a_3 b_0 b_1 b_4 - 3 a_0^2 a_3^2 b_0 b_2 b_4 + 4 a_0 a_1 a_2 a_3 b_0 b_2 b_4$$
$$- a_0 a_1^2 a_3 b_0 b_3 b_4 + 5 a_0^2 a_2 a_3 b_0 b_3 b_4 + 4 a_0^2 a_1 a_3 b_0 b_4^2) b_4^2$$
$$+ (2 a_0 a_4 b_0^2 b_2^2 - 4 a_0 a_4 b_0 b_1^2 b_2)(a_5^2 b_2 + a_4 a_5 b_3 + a_4^2 b_4)$$
$$+ (4 a_0^2 a_4 b_0 b_2 b_3^2 + 5 a_0 a_1 a_4 b_0 b_1 b_3^2 - a_0 a_1 a_4 b_0 b_2^2 b_3 - 3 a_0 a_2 a_4 b_0^2 b_3^2$$

$$+ 4a_0a_2a_4b_0b_1b_2b_3 - a_0a_3a_4b_0b_1^2b_3 + 5a_0a_3a_4b_0^2b_2b_3$$
$$+ 4a_0a_4^2b_0^2b_1b_3)(a_4b_4 + a_5b_3) + (- 4a_0^3a_4b_0b_4^3 + a_0^2a_1a_4b_0b_3b_4^2$$
$$+ 2a_0^2a_2a_4b_0b_2b_4^2 + 2a_0^2a_2a_4b_0b_3^2b_4 + 2a_0a_1^2a_4b_0b_2b_4^2$$
$$- a_0a_1^2a_4b_0b_3^2b_4 - 2a_0^2a_3a_4b_0b_2b_3b_4 - 5a_0^2a_3a_4b_0b_1b_4^2$$
$$+ 8a_0a_1a_2a_4b_0b_2b_3b_4 - 2a_0a_1a_2a_4b_0b_1b_4^2 - 8a_0^2a_4^2b_0b_1b_3b_4$$
$$- 4a_0^2a_4^2b_0b_2^2b_4 + 10a_0a_1a_3a_4b_0b_1b_3b_4 + 6a_0^2a_4^2b_0^2b_4^2$$
$$+ 4a_0a_2^2a_4b_0b_2^2b_4 - 4a_0a_2^2a_4b_0^2b_4^2 - 8a_0a_1a_3a_4b_0^2b_4^2$$
$$- 2a_0a_2a_3a_4b_0^2b_3b_4 + 8a_0a_2a_3a_4b_0b_1b_2b_4 - 5a_0a_1a_4^2b_0^2b_3b_4$$
$$- 2a_0a_1a_4^2b_0b_1b_2b_4 - a_0a_3^2a_4b_0b_1^2b_4 + 2a_0a_3^2a_4b_0^2b_2b_4$$
$$+ 2a_0a_2a_4^2b_0b_1^2b_4 + 2a_0a_2a_4^2b_0^2b_2b_4 + a_0a_3a_4^2b_0^2b_1b_4$$
$$- 4a_0a_4^3b_0^3b_4)b_4 + (5a_0a_5b_0^2b_1b_2^2 - 5a_0a_5b_0b_1^3b_2)a_5^2$$
$$+ a_5(- 5a_0^2a_5b_0b_1b_3^3 - 5a_0a_5^2b_0^3b_2b_3 + 5a_0^2a_5b_0b_2^2b_3^2$$
$$+ 5a_0a_5^2b_0^2b_1^2b_3 - 3a_0a_1a_5b_0^2b_3^3 - 3a_0a_4a_5b_0^3b_3^2 + 7a_0a_1a_5b_0b_1b_2b_3^2$$
$$+ 7a_0a_4a_5b_0^2b_1b_2b_3 - a_0a_1a_5b_0b_2^3b_3 - a_0a_4a_5b_0b_1^3b_3$$
$$- 7a_0a_2a_5b_0^2b_2b_3^2 - 7a_0a_3a_5b_0^2b_1b_3^2 + 6a_0a_2a_5b_0b_1b_2^2b_3$$
$$+ 6a_0a_3a_5b_0b_1^2b_2b_3 + 3a_0a_2a_5b_0b_1^2b_3^2 + 3a_0a_3a_5b_0^2b_2^2b_3).$$

(Glieder, die den Factor $a_5\,b_4$ und nur einen der Factoren a_0, b_0 enthalten):

$$- 2a_3a_5b_2b_4(a_1^2b_0b_2^2 + a_0a_1b_1b_2^2 + a_0^2b_2^3 + a_0a_2b_1^2b_2 + a_1a_2b_0b_1b_2$$
$$+ a_2^2b_0^2b_2 + a_0a_3b_1^3 + a_1a_3b_0b_1^2 + a_2a_3b_0^2b_1 + a_3^2b_0^3)$$
$$- 3a_3a_4a_5b_1b_4(a_0b_1^3 + a_1b_0b_1^2 + a_2b_0^2b_1 + a_3b_0^3) + (2a_3^2a_5^2b_0b_4$$
$$- 4a_3a_4^2a_5b_0b_4)b_0^3 - 3a_2a_5b_2b_3b_4(a_1^2b_0b_2 + a_0a_1b_1b_2 + a_0^2b_2^2$$
$$+ a_0a_2b_1^2 + a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2) + (- a_2a_3a_5b_1b_3b_4 - a_2a_4a_5b_1b_2b_4$$
$$+ 3a_2a_5^2b_1^2b_4 + 3a_2^2a_5b_1b_4^2)(a_0b_1^2 + a_1b_0b_1 + a_2b_0^2) + (4a_2a_4a_5^2b_0^2b_4$$
$$+ 5a_2a_3a_5^2b_0b_1b_4 - a_2a_4^2a_5b_0b_1b_4 - 3a_2^2a_5^2b_0b_2b_4 + 4a_2a_3a_4a_5b_0b_2b_4$$
$$- a_2a_3^2a_5b_0b_3b_4 + 5a_2^2a_4a_5b_0b_3b_4 + 4a_2^2a_3a_5b_0b_4^2)b_0^2 + (2a_1a_5b_2^2b_4^2$$
$$- 4a_1a_5b_2b_3^2b_4)(a_1^2b_0 + a_0a_1b_1 + a_0^2b_2) + (4a_1^2a_5b_1b_3b_4^2$$
$$+ 5a_1a_2a_5b_1b_2b_4^2 - a_1a_2a_5b_1b_3^2b_4 - 3a_1a_3a_5b_1^2b_4^2 + 4a_1a_3a_5b_1b_2b_3b_4$$
$$- a_1a_4a_5b_1b_2^2b_4 + 5a_1a_4a_5b_1^2b_3b_4 + 4a_1a_5^2b_1^2b_2b_4)(a_0b_1 + a_1b_0)$$

$$+ (-4a_1^3 a_5 b_0 b_4^3 + a_1^2 a_2 a_5 b_0 b_3 b_4^2 + 2a_1^2 a_3 a_5 b_0 b_2 b_4^2 + 2a_1^2 a_3 a_5 b_0 b_3^2 b_4$$
$$+ 2a_1 a_2^2 a_5 b_0 b_2 b_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 b_0 b_3^2 b_4 - 2a_1^2 a_4 a_5 b_0 b_2 b_3 b_4$$
$$- 5a_1^2 a_4 a_5 b_0 b_1 b_4^2 + 8a_1 a_2 a_3 a_5 b_0 b_2 b_3 b_4 - 2a_1 a_2 a_3 a_5 b_0 b_1 b_4^2$$
$$- 8a_1^2 a_5^2 b_0 b_1 b_3 b_4 - 4a_1^2 a_5^2 b_0 b_2^2 b_4 + 10a_1 a_2 a_4 a_5 b_0 b_1 b_3 b_4$$
$$+ 6a_1^2 a_5^2 b_0^2 b_4^2 + 4a_1 a_3^2 a_5 b_0 b_2^2 b_4 - 4a_1 a_3^2 a_5 b_0^2 b_4^2 - 8a_1 a_2 a_4 a_5 b_0^2 b_4^2$$
$$- 2a_1 a_3 a_4 a_5 b_0^2 b_3 b_4 + 8a_1 a_3 a_4 a_5 b_0 b_1 b_2 b_4 - 5a_1 a_2 a_5^2 b_0^2 b_3 b_4$$
$$- 2a_1 a_2 a_5^2 b_0 b_1 b_2 b_4 - a_1 a_4^2 a_5 b_0 b_1^2 b_4 + 2a_1 a_4^2 a_5 b_0^2 b_2 b_4$$
$$+ 2a_1 a_3 a_5^2 b_0 b_1^2 b_4 + 2a_1 a_3 a_5^2 b_0^2 b_2 b_4 + a_1 a_4 a_5^2 b_0^2 b_1 b_4 - 4a_1 a_5^3 b_0^3 b_4) b_0$$
$$+ (5a_0 a_5 b_2^2 b_3 b_4^2 - 5a_0 a_5 b_2 b_3^3 b_4) a_0^2 + (-5a_0^2 a_5 b_1 b_2 b_4^3 - 5a_0 a_5^2 b_1^3 b_3 b_4$$
$$+ 5a_0^2 a_5 b_1 b_3^2 b_4^2 + 5a_0 a_5^2 b_1^2 b_2^2 b_4 - 3a_0 a_1 a_5 b_1^2 b_4^3 - 3a_0 a_4 a_5 b_1^3 b_4^2$$
$$+ 7a_0 a_1 a_5 b_1 b_2 b_3 b_4^2 + 7a_0 a_4 a_5 b_1^2 b_2 b_3 b_4 - a_0 a_1 a_5 b_1 b_3^3 b_4$$
$$- a_0 a_4 a_5 b_1 b_2^3 b_4 - 7a_0 a_2 a_5 b_1^2 b_3 b_4^2 - 7a_0 a_3 a_5 b_1^2 b_2 b_4^2$$
$$+ 6a_0 a_2 a_5 b_1 b_2 b_3^2 b_4 + 6a_0 a_3 a_5 b_1 b_2^2 b_3 b_4 + 3a_0 a_2 a_5 b_1 b_2^2 b_4^2$$
$$+ 3a_0 a_3 a_5 b_1^2 b_3^2 b_4) a_0 .$$

(Glieder (nicht vollständig reducibel), die je einen der Factoren a_0, b_0 und je einen der Factoren a_5, b_4 enthalten):

$$- 2a_0^2 a_2 b_1 b_3 (a_2 b_4^3 + a_3 b_3 b_4^2 + a_4 b_3^2 b_4 + a_5 b_3^3) + 3a_0^2 a_1 a_2 b_1 b_4^4$$
$$- 3a_0^2 a_3 b_1 b_2 b_3 (a_3 b_4^2 + a_4 b_3 b_4 + a_5 b_3^2) + (- a_0 a_1 a_3 b_1 b_3 b_4$$
$$- a_0 a_2 a_3 b_1 b_2 b_4 + 3a_0 a_3^2 b_1^2 b_4 + 3a_0^2 a_3 b_1 b_4^2) a_0 b_4^2 + a_0 (2a_0 a_4 b_1^2 b_3^2$$
$$- 4a_0 a_4 b_1 b_2^2 b_3)(a_4 b_4 + a_5 b_3) + (4a_0^2 a_4 b_1 b_3 b_4^2 + 5a_0 a_1 a_4 b_1 b_2 b_4^2$$
$$- a_0 a_1 a_4 b_1 b_3^2 b_4 - 3a_0 a_2 a_4 b_1^2 b_4^2 + 4a_0 a_2 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4 - a_0 a_3 a_4 b_1 b_2^2 b_4$$
$$+ 5a_0 a_3 a_4 b_1^2 b_3 b_4 + 4a_0 a_4^2 b_1^2 b_2 b_4) a_0 b_4 + (5a_0 a_5 b_1^2 b_2 b_3^2$$
$$- 5a_0 a_5 b_1 b_2^3 b_3) a_0 a_5 - 2a_0^3 a_2 b_2 b_4^4 - 3a_0^3 a_3 b_2 b_3 b_4^3 + (2a_0 a_4 b_2^2 b_4^2$$
$$- 4a_0 a_4 b_2 b_3^2 b_4) a_0^2 b_4 - 2a_1 a_3 b_0^2 b_2 (a_4^2 b_2 b_4 + a_3 a_4 b_3 b_4 + a_3^2 b_4^2$$
$$+ a_3 a_5 b_3^2 + a_4 a_5 b_2 b_3 + a_5^2 b_2^2) - 3a_1 a_2 a_3 b_0^2 b_3 (a_3 b_4^2 + a_4 b_3 b_4 + a_5 b_3^2)$$
$$+ (2a_1^2 a_3^2 b_0 b_4 - 4a_1 a_2^2 a_3 b_0 b_4) b_0 b_4^2 - 3a_1 a_4 b_0^2 b_1 b_2 (a_5^2 b_2 + a_4 a_5 b_3$$
$$+ a_4^2 b_4) + (- a_1 a_2 a_4 b_0 b_2 b_3 - a_1 a_3 a_4 b_0 b_1 b_3 + 3a_1 a_4^2 b_0^2 b_3$$
$$+ 3a_1^2 a_4 b_0 b_3^2)(a_4 b_4 + a_5 b_3) b_0 + (4a_1 a_3 a_4^2 b_0^2 b_4 + 5a_1 a_2 a_4^2 b_0 b_1 b_4$$
$$- a_1 a_3^2 a_4 b_0 b_1 b_4 - 3a_1^2 a_4^2 b_0 b_2 b_4 + 4a_1 a_2 a_3 a_4 b_0 b_2 b_4 - a_1 a_2^2 a_4 b_0 b_3 b_4$$

$$+ 5a_1^2a_3a_4b_0b_3b_4 + 4a_1^2a_2a_4b_0b_4^2)b_0b_4 + (2a_1a_5b_0^2b_2^2$$
$$- 4a_1a_5b_0b_1^2b_2)a_5^2b_0 + (4a_1^2a_5b_0b_2b_3^2 + 5a_1a_2a_5b_0b_1b_3^2$$
$$- a_1a_2a_5b_0b_2^2b_3 - 3a_1a_3a_5b_0^2b_3^2 + 4a_1a_3a_5b_0b_1b_2b_3 - a_1a_4a_5b_0b_1^2b_3$$
$$+ 5a_1a_4a_5b_0^2b_2b_3 + 4a_1a_5^2b_0^2b_1b_3)a_5b_0 - 2a_1a_3b_1b_3(a_0b_1$$
$$+ a_1b_0)(a_3b_4^2 + a_4b_3b_4 + a_5b_3^2) - 3a_1a_2a_3b_1b_4^3(a_0b_1 + a_1b_0)$$
$$- 3a_1a_4b_1b_2b_3(a_0b_1 + a_1b_0)(a_4b_4 + a_5b_3) + (- a_1a_2a_4b_1b_3b_4$$
$$- a_1a_3a_4b_1b_2b_4 + 3a_1a_4^2b_1^2b_4 + 3a_1^2a_4b_1b_4^2)(a_0b_1 + a_1b_0)b_4$$
$$+ (2a_1a_5b_1^2b_3^2 - 4a_1a_5b_1b_2^2b_3)(a_0b_1 + a_1b_0)a_5$$
$$- 2a_1a_3b_2b_4^3(a_1^2b_0 + a_0a_1b_1 + a_0^2b_2) - 3a_1a_4b_2b_3b_4^2(a_1^2b_0 + a_0a_1b_1$$
$$+ a_0^2b_2) - 2a_2a_4b_0^3b_2(a_5^2b_2 + a_4a_5b_3 + a_4^2b_4) - 3a_2a_3a_4b_0^3b_3(a_4b_4$$
$$+ a_5b_3) + (2a_2^2a_4^2b_0b_4 - 4a_2a_3^2a_4b_0b_4)b_0^2b_4 - 3a_2a_5^3b_0^3b_1b_2$$
$$+ (- a_2a_3a_5b_0b_2b_3 - a_2a_4a_5b_0b_1b_3 + 3a_2a_5^2b_0^2b_3 + 3a_2^2a_5b_0b_3^2)a_5b_0^2$$
$$- 2a_2a_4b_1b_3(a_0b_1^2 + a_1b_0b_1 + a_2b_0^2)(a_4b_4 + a_5b_3)$$
$$- 3a_2a_3a_4b_1b_4^2(a_0b_1^2 + a_1b_0b_1 + a_2b_0^2) - 3a_2a_5^2b_1b_2b_3(a_0b_1^2$$
$$+ a_1b_0b_1 + a_2b_0^2) - 2a_2a_4b_2b_4^2(a_1^2b_0b_2 + a_0a_1b_1b_2 + a_0^2b_2^2$$
$$+ a_0a_2b_1^2 + a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2) - 2a_3a_5^3b_0^4b_2 - 3a_3a_4a_5^2b_0^4b_3$$
$$- 2a_3a_5^2b_1b_3(a_0b_1^3 + a_1b_0b_1^2 + a_2b_0^2b_1 + a_3b_0^3).$$

(Normal-Formen):

$$- 5a_0^3a_5b_0b_3b_4^3 - 6a_0^2a_1a_5b_0b_2b_4^3 + a_0^2a_1a_5b_0b_3^2b_4^2 - 7a_0a_1^2a_5b_0b_1b_4^3$$
$$- a_0a_1^2a_5b_0b_3^3b_4 + 3a_0a_1^2a_5b_0b_2b_3b_4^2 + 7a_0^2a_2a_5b_0b_1b_4^3$$
$$+ 2a_0^2a_2a_5b_0b_3^3b_4 - 4a_0^2a_2a_5b_0b_2b_3b_4^2 - 4a_0a_1a_2a_5b_0b_2^2b_4^2$$
$$+ 11a_0a_1a_2a_5b_0b_2b_3^2b_4 - 10a_0a_1a_2a_5b_0b_1b_3b_4^2 + 8a_0a_1a_2a_5b_0^2b_4^3$$
$$+ 8a_0^2a_3a_5b_0b_2^2b_4^2 - 9a_0^2a_3a_5b_0b_2b_3^2b_4 + a_0^2a_3a_5b_0b_1b_3b_4^2$$
$$- 4a_0^2a_3a_5b_0^2b_4^3 + 5a_0a_1a_3a_5b_0b_1b_3^2b_4 + 2a_0a_1a_3a_5b_0b_2^2b_3b_4$$
$$- 2a_0a_1a_3a_5b_0b_1b_2b_4^2 - 6a_0a_1a_3a_5b_0^2b_3b_4^2 + 6a_0a_2^2a_5b_0b_2^2b_3b_4$$
$$- 6a_0a_2^2a_5b_0b_1b_2b_4^2 - a_0a_2^2a_5b_0^2b_3b_4^2 - 13a_0^2a_4a_5b_0b_1b_3^2b_4$$
$$- 3a_0^2a_4a_5b_0b_2^2b_3b_4 + 2a_0^2a_4a_5b_0b_1b_2b_4^2 + 11a_0^2a_4a_5b_0^2b_3b_4^2$$
$$- 8a_0a_1a_4a_5b_0b_1^2b_4^2 + 4a_0a_1a_4a_5b_0^2b_2b_4^2 - 8a_0a_1a_4a_5b_0^2b_3^2b_4$$
$$+ a_0a_2a_3a_5b_0b_1^2b_4^2 + 5a_0a_2a_3a_5b_0b_1b_2b_3b_4 + 4a_0a_2a_3a_5b_0b_2^3b_4$$
$$- 12a_0a_2a_3a_5b_0^2b_2b_4^2 + a_0a_2a_3a_5b_0^2b_3^2b_4 + 5a_0^2a_5^2b_0b_1^2b_4^2$$

$$
\begin{aligned}
&- 5a_0^2a_5^2b_0b_1b_2b_3b_4 - 5a_0^2a_5^2b_0b_2^3b_4 + 5a_0^2a_5^2b_0^2b_2b_4^2 + 5a_0^2a_5^2b_0^2b_3^2b_4 \\
&+ 11a_0a_1a_5^2b_0^2b_1b_4^2 + 2a_0a_1a_5^2b_0^2b_2b_3b_4 - 3a_0a_1a_5^2b_0b_1b_2^2b_4 \\
&- 13a_0a_1a_5^2b_0b_1^2b_3b_4 - a_0a_3^2a_5b_0^2b_1b_4^2 - 6a_0a_3^2a_5b_0^2b_2b_3b_4 \\
&+ 6a_0a_3^2a_5b_0b_1b_2^2b_4 - 6a_0a_2a_4a_5b_0^2b_1b_4^2 - 2a_0a_2a_4a_5b_0^2b_2b_3b_4 \\
&+ 2a_0a_2a_4a_5b_0b_1b_2^2b_4 + 5a_0a_2a_4a_5b_0b_1^2b_3b_4 - 4a_0a_2a_5^2b_0^3b_4^2 \\
&+ a_0a_2a_5^2b_0^2b_1b_3b_4 - 9a_0a_2a_5^2b_0b_1^2b_2b_4 + 8a_0a_2a_5^2b_0^2b_2^2b_4 \\
&+ 8a_0a_3a_4a_5b_0^3b_4^2 - 10a_0a_3a_4a_5b_0^2b_1b_3b_4 + 11a_0a_3a_4a_5b_0b_1^2b_2b_4 \\
&- 4a_0a_3a_4a_5b_0^2b_2^2b_4 - 4a_0a_3a_5^2b_0^2b_1b_2b_4 + 2a_0a_3a_5^2b_0b_1^3b_4 \\
&+ 7a_0a_3a_5^2b_0^3b_3b_4 + 3a_0a_4^2a_5b_0^2b_1b_2b_4 - a_0a_4^2a_5b_0b_1^3b_4 \\
&- 7a_0a_4^2a_5b_0^3b_3b_4 + a_0a_4a_5^2b_0^2b_1^2b_4 - 6a_0a_4a_5^2b_0^3b_2b_4 \\
&- 5a_0a_5^3b_0^3b_1b_4 .
\end{aligned}
$$